NOM :
Prénom :

Mardi 19 Novembre 2024

Interrogation 8

Suites 2

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de deux suites équivalentes.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

2. Définition de la négligeabilité.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) et négligeable devant (v_n), et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Caractérisation des $\sim$ par les o.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$.

4. Premiers équivalents de références.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $\cos(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n^2/2$, $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

1. Premier développement asymptotique.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, f dérivable en a et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. Alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} f(a) + f'(a)(u_n - a) + o(u_n - a).$$

2. Composition des $\sim$ par $\ln$.
Soit $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\ell \neq 1$. Alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

3. Théorème de l'âne.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{K}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Si $\ell \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

4. Équivalent de Stirling.

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

Exercice 2 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$.

On commence par transformé l'expression de u_n : $u_n = e^{n^2 \ln(\cos(\alpha/n))}$. Or $\cos(\alpha/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc

$$\begin{aligned} \ln(\cos(\alpha/n)) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \cos(\alpha/n) - 1 && \text{eq de ref} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\alpha^2}{2n^2} && \text{eq de ref} \end{aligned}$$

Donc

$$n^2 \ln(\cos(\alpha/n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\alpha^2/2$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\alpha^2/2} \neq 0$. Donc, par théorème de l'âne,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\alpha^2/2}.$$