NOM :
Prénom :

Mardi 26 Novembre 2024

Interrogation 9

Groupes - Anneaux - Corps

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition du noyau d'un morphisme de groupe.
Soit $(G, *)$ et $(H, \cdot)$ deux groupes, $f : G \to H$ un morphisme de groupe. On définit le noyau de f, noté $\ker(f)$, par

$$\ker(f) = f^{-1}(\{e_H\}) = \{g \in G,\ f(g) = e_H\}$$

où e_H est l'élément neutre de H.

2. Caractérisation des sous-groupes.
Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$. H est un sous-groupe de G, si et seulement si, $H \neq \emptyset$ et $\forall h, h' \in H$, $h^{-1} * h' \in H$.

3. Définition d'un anneau.
Soit A un ensemble muni de deux LCI $+$ et $*$. Alors $(A, +, *)$ un anneau, si $(A, +)$ est un groupe abélien, $\exists 1_A \in A$ tel que $\forall x \in a$, $1_A * x = x * 1_A = x$ (élément neutre pour $*$) et $\forall x, y, z \in Z$, $(x+y)*z = x*z + y*z$ (distributivité de $*$ sur $+$).

4. Binôme de Newton.
Soit $(A, +, \times)$ un anneau, $a, b \in A$. Si a et b commutent (*i.e.* si $ab = ba$), alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

5. Définition de la commutativité et associativité d'une LCI.
Soit G un ensemble muni d'une LCI $*$. On dit que $*$ est commutative si $\forall a, g \in G$, $a * b = b * a$. On dit que $*$ est associative si $\forall a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

6. Caractérisation des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Ie si $H \subset \mathbb{Z}$, alors H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

7. Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.
Soit $H \subset \mathbb{R}$. Si H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, alors $\exists a \in \mathbb{R}_+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$ ou H est dense dans $\mathbb{R}$.

8. Définition d'un morphisme de groupe.
Soit $(G, *), (H, \star)$ deux groupes, $f : G \to H$. On dit que f est un morphisme de groupe si $\forall g, g' \in G$, $f(g * g') = f(g) \star f(g')$.

Exercice 2 :
Montrer que $\mathbb{R}$ est un groupe pour la loi $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x * y = x + y + 1$.

Tout d'abord, $*$ est clairement une LCI sur $\mathbb{R}$ car $+$ est une LCI sur $\mathbb{R}$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x * y = x + y + 1 = y + x + 1 = y * x$ car $+$ est commutative sur $\mathbb{R}$. Donc $*$ est commutative.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x * (-1) = x - 1 + 1 = x$. Et donc, par commutativité, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x * (-1) = (-1) * x = x$. Donc -1 est élément neutre de $*$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x * (-x-2) = x + (-x-2) + 1 = -1$. Et donc, par commutativité, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x * (-x-2) = (-x-2) * x = -1$. Donc tout élément de $\mathbb{R}$ est inversible pour $*$.

Et enfin :

$$\begin{aligned}
\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x * y) * z &= (x + y + 1) * z && \text{def } * \\
&= (x + y + 1) + z + 1 && \text{def } * \\
&= x + (y + z + 1) + 1 && \text{comm et asso } + \\
&= x + (y * z) + 1 && \text{def } * \\
&= x * (y * z) && \text{def } *
\end{aligned}$$

Donc $*$ est associative.

Donc, par définition, $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.