Chapitre 10 - TD :
Dimension finie

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

26 novembre 2024

1 Dimension finie

Exercice 1 :
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x+a)$, $x \mapsto \sin(x+b)$ et $x \mapsto \sin(x+c)$ sont-elles linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 2 :
Soit E un espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sev supplémentaires dans E. Soit F un sev de E. A-t-on

$$F = (F \cap E_1) \oplus (F \cap E_2) \ ?$$

Exercice 3 :
On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,0)$ et $\varepsilon_3 = (0,1,1)$. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_2)$ une base de E. On pose

$$\varepsilon_1 = e_2 + 2e_3, \quad \varepsilon_2 = e_3 - e_1, \quad \varepsilon_3 = e_1 + 2e_2$$

Montrer que $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.

Exercice 5 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit

$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 = e_2 + e_3$$

Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et la compléter en une base de E.

Exercice 6 :
On pose

$$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x)\}$$

1. Montrer que E est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. Déterminer une base E et sa dimension.

Exercice 7 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les familles $\mathcal{C}_n = (x \mapsto \cos(kx))_{0 \leq k \leq n}$ et $\mathcal{S}_n = (x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ sont des familles libres.

Exercice 8 :
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie. Montrer que E peut être vu aussi comme un $\mathbb{R}$-ev et donner un lien entre $\dim_{\mathbb{C}}(E)$ et $\dim_{\mathbb{R}}(E)$.

Exercice 9 ((*)) :
Soit $a < b$ et $(x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$, c'est-à-dire $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
Soit F l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ affines sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$. Autrement dit

$$F = \left\{ f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}),\ \forall k \in \{0, \ldots, n-1\},\ f|_{]x_k, x_{k+1}[} \text{ affine} \right\}.$$

Montrer que F est $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer la dimension de F.

2 Dimension finie et sev

2.1 Base d'un sev

Exercice 10 :
Soit

$$E = \{(a + b, c, a + b + c, b - c), a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + 2x_2 = x_3 - 4x_4 = 0\}$$

Montrer que ce sont des sev de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de ces sev.

Exercice 11 :
On pose

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

et

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, 2x_2 - x_1 - 3x_4 = 0\}$$

Donner la dimension de ces sev.

Exercice 12 :
Déterminer une base de

$$E = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5, \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

Exercice 13 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et F, G, H trois sev de E.

1. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G \neq \{0\}$.
2. On suppose $\dim(F) + \dim(G) + \dim(H) > 2n$. Que peut-on dire de $F \cap G \cap H$?

Exercice 14 ([✓]) :
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u = (1,0,1,0),\ v = (0,1,-1,0),\ w = (1,1,1,1),\ x = (0,0,1,0),\ y = (1,1,0,-1)$$

On pose enfin $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ et $G = \mathrm{Vect}(x,y)$.
Donner les dimension de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

2.2 Supplémentarité

Exercice 15 ([✓]) :
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sev suivants :

1. $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,1,0)$ et $v = (2,1,1)$
2. $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ avec $u = (-1,1,0)$, $v = (2,0,1)$ et $w = (1,1,1)$
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 3z = 0\}$
4. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - t = y - z + t = 0\}$.

Exercice 16 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit H et H' deux hyperplans de E. Montrer que H et H' possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 17 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Déterminer $\dim H_1 \cap H_2$.
2. Soit H un hyperplan de E et F un sev de E. Déterminer $\dim F \cap H$. Que peut-on dire de $F \cap H$ pour F ?
3. Soit H un hyperplan de E et D une droite vectorielle de E. A quelle(s) condition(s) sur D et H, a-t-on $H \oplus D = E$.

Exercice 18 (Supplémentaires communs (Centrale MP)) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F_1, F_2 deux sev de E.

1. On suppose que F_1 et F_2 sont des hyperplans de E. Montrer qu'ils admettent un supplémentaire commun.
2. On suppose $\dim(F_1) = \dim(F_2)$. Montrer qu'il existe un sev G de E tel que $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G = E$.
3. On suppose $\dim(F_1) \leq \dim(F_2)$. Montrer qu'il existe G_1, G_2 deux sev de E tels que $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2 = E$ et $G_2 \subset G_1$.

2.3 Rang

Exercice 19 :
Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. $x_1 = (1,1,1,1)$, $x_2 = (1,-1,1,-1)$, $x_3 = (1,0,1,1)$
2. $x_1 = (1,1,0,1)$, $x_2 = (1,-1,1,0)$, $x_3 = (2,0,1,1)$, $x_4 = (0,2,-1,1)$

Exercice 20 :
Déterminer, suivant le paramètre α, le rang de la famille

$$x_1 = (1, \alpha, 1),\ x_2 = (\alpha, 1, \alpha),\ x_3 = (-1, \alpha, 1).$$

Exercice 21 :
Donner le rang de (f_1, f_2, f_3, f_4) avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \sin(x)^2,\ f_2(x) = \cos(x)^2,\ f_3(x) = \sin(2x),\ f_3(x) = \cos(2x).$$

Exercice 22 :
Dans $\mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$, on considère

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quel est le rang (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Exercice 23 :
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs E un $\mathbb{K}$-ev.
Montrer que pour $p \leq n$,

$$\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) \geq \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) + p - n$$