# DS 3
# Fonctions Usuelles - Relations d'Ordres - Équations Différentielles

Simon Dauguet
*simon.dauguet@gmail.com*

Mercredi 13 Novembre 2024

*Le devoir dure 4h.*

*La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.*

*Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.*

*La calculatrice n'est pas autorisée.*

*Le sujet comporte 3 pages.*

**Problème 1 (Équations Différentielles d'Euler) :**
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$ de fonction inconnue $y$ suivante

$$x^{a+1}y'' + (2a+1)x^a y' + a^2 x^{a-1} y = -1 \qquad (E_a)$$

1. On suppose $a = 0$. Donner les solutions de $(E_0)$ sur $]0,+\infty[$.
2. On suppose désormais $a > 0$.
   (a) Vérifier la fonction $f_a : x \mapsto x^{-a}$ est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène

   $$x^{a+1}y'' + (2a+1)x^a y' + a^2 x^{a-1} y = 0 \qquad (H_a)$$

   (b) Si $y$ est une solution de $(E_a)$ sur $]0,+\infty[$, on définit la fonction $z$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $z(x) = x^a y(x)$. Montrer alors que $z$ vérifie l'équation différentielle $(E_0)$.
   (c) En déduire les solutions de $(E_a)$
   (d) Par exemple, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation d'Euler $(E_1)$ : $x^2y'' + 3xy' + y = -1$
3. On suppose $a = e$. Déterminer la solution $f$ de $(E_e)$ qui vérifie $f(1) = -1$ et $f'(1) = 2e - 1$.

**Problème 2 (Partie fractionnaire et densité) :**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la partie fractionnaire de $x$ par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ et on considère l'ensemble $F_x = \{f(nx), n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq f(x) < 1$
   (b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $f(x+k) = f(x)$
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(px) = f(pf(x))$.
2. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$
   (b) Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(qx) = 0$.
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Donc $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, la division euclidienne de $n$ par $q$ nous assure qu'il existe un unique couple $(a,r)$ avec $r \in \{0, \dots, q-1\}$ et $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = qa + r$. Montrer que $F_x$ est un ensemble fini.
4. Soit $x \notin \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que $F_x$ admet une borne inférieure, notée $\alpha$.
   (b) On suppose $\alpha > 0$. Justifier que $\{k \in \mathbb{N},\ k\alpha \geq 1\}$ admet un plus petit élément. On note $m$ cet élément. Vérifier que $\alpha < \frac{\alpha+1}{m}$.
   (c) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha \leq f(n_0 x) < \frac{\alpha+1}{m}$
   (d) En déduire $\lfloor mf(n_0x) \rfloor \geq 1$ et que $f(mf(n_0x)) < \alpha$.
   (e) Mettre en évidence une contradiction et conclure.
5. On considère encore $x \notin \mathbb{Q}$.
   (a) Justifier que pour tout $\lambda > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < f(nx) < \lambda$.
   (b) Montrer que $F_x$ est dense dans $]0,1[$, c'est-à-dire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < b < 1$, l'intervalle $]a,b[$ contient un élément de $F_x$. (*Indic : On pourra considérer l'ensemble* $\{k \in \mathbb{N}, kf(nx) > a\}$ *pour un* $n \in \mathbb{N}^*$ *bien choisi.*)

---

**Problème 3 (Trois méthodes de simplifications d'une expression) :**
On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

On se propose de donner une expression simple de $f$ par trois méthodes différentes.

1. Première méthode : Étude de fonction
   (a) Déterminer le domaine de définition de $f$.
   (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f$ et calculer $f'$.
   (c) En déduire une expression simple de $f$.
2. Deuxième méthode : Avec des fonctions hyperboliques
   (a) Montrer que $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $]-1,1[$.
   (b) Montrer que $\mathrm{th}$ est bijective. On appellera $\mathrm{argth}$ sa réciproque et en donner une expression simple (à l'aide seulement du $\ln$).
   (c) Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer un réel $z$ simple dépendant de $y$ tel que $\frac{1+\mathrm{th}(y)}{1-\mathrm{th}(y)} = e^z$.
   (d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2\arctan(e^x)) = -\mathrm{th}(x)$.

(e) Retrouver l'expression simple de $f$ de la question 1c.

3. Troisième méthode : Avec des fonctions circulaires.
   (a) Soit $x \in [-1, 1[$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in ]0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.
   (b) Exprimer $f$ en fonction de $\theta$ et retrouver une expression simple de $f$.

**Exercice 4 (BONUX) :**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 1.$$