DS 3
Fonctions Usuelles - Relations d'Ordres - Équations Différentielles
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 13 Novembre 2024

Problème 1 (Équation Différentielles d'Euler) :

1. On a
$$xy'' + y' = -1 \qquad (E_0)$$
qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en y' qui est équivalence à
$$y'' + \frac{1}{x}y' = -\frac{1}{x}$$
que nous résolvons uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$. Les coefficients sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions de l'équation homogène sont les
$$x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$$
sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Une solution pariculière est la fonction $x \mapsto -1$. Donc les solutions à cette équation sont les $y'(x) = \frac{\lambda}{x} - 1$ pour $x > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Et par suite, les solutions de (E_0) sont les $y(x) = \lambda \ln(x) - x + \mu$ pour $x > 0$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. On suppose $a > 0$.

(a) On pose $f_a(x) = \frac{1}{x^a}$ pour tout $x > 0$. Cette fonction est définie et infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Et $\forall x > 0$,
$$f_a'(x) = -\frac{a}{x^{a+1}} \qquad \text{et} \qquad f_a''(x) = \frac{a(a+1)}{x^{a+2}}$$
On a donc, pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned}
&x^{a+1}f_a''(x) + (2a+1)x^a f_a'(x) + a^2x^{a-1}f_a(x) \\
=&\frac{a(a+1)x^{a+1}}{x^{a+2}} - \frac{a(2a+1)x^a}{x^{a+1}} + \frac{a^2x^{a-1}}{x^a} \\
=&\frac{a(a+1)}{x} - \frac{a(2a+1)}{x} + \frac{a^2}{x} \\
=&\frac{a^2 + a(a+1) - a(2a+1)}{x} \\
=&0
\end{aligned}$$
Donc f_a est bien solution de l'équation différentielle homogène (H_a).

(b) Soit y une solutions de (E_a) sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $z(x) = x^a y(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Par produit de fonction dérivable, z est deux fois dérivable et pour tout $x > 0$, on a

$$z'(x) = ax^{a-1}y(x) + x^a y'(x)$$

et

$$z''(x) = a(a-1)x^{a-2}y(x) + 2ax^{a-1}y'(x) + x^a y''(x)$$

D'où l'on déduit, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} xz''(x) &= a(a-1)x^{a-1}y(x) + 2ax^a y'(x) + x^{a+1}y''(x) \\ &= x^{a+1}x''(x) + (2a+1)x^a y'(x) - x^a y'(x) + a^2x^{a-1}y(x) - ax^{a-1}y(x) \\ &= -1 - x^a y'(x) - ax^{a-1}y(x) \\ &= -1 - (z'(x) - ax^{a-1}y(x)) - ax^{a-1}y(x) \\ &= -1 - z'(x) \end{aligned}$$

en utilisant le fait que y est solutions de (E_a).

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xz''(x) + z'(x) = -1$. Donc z est solution de (E_0).

(c) Soit y une solution de (E_a) sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $z : x \mapsto x^a y(x)$ est solutions de (E_0). Donc d'après la question 1, $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x > 0,\ z(x) = \lambda \ln(x) - x + \mu$. On en déduit donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x > 0,\ y(x) = \frac{\lambda \ln(x)}{x^a} - \frac{1}{x^{a-1}} + \frac{\mu}{x^a}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $y(x) = \frac{\lambda \ln(x)}{x^a} - \frac{1}{x^{a-1}} + \frac{\mu}{x^a}$ pour tout $x > 0$. Alors y est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme d'applications deux fois dérivables (elle est même infiniment dérivable). Et on a

$$\forall x > 0,\ y'(x) = -\frac{a\lambda \ln(x)}{x^{a+1}} + \frac{a-1}{x^a} - \frac{a\mu - \lambda}{x^{a+1}}$$

et

$$\forall x > 0,\ y''(x) = \frac{a(a+1)\lambda \ln(x)}{x^{a+2}} - \frac{a(a-1)}{x^{a+1}} + \frac{a(a+1)\mu - (2a+1)\lambda}{x^{a+2}}$$

Ce qui nous donne, pour tout $x > 0$

$$\left\{ \begin{array}{rl} x^{a+1}y''(x) &= \frac{a(a+1)\lambda \ln(x)}{x} - a(a-1) + \frac{a(a+1)\mu}{x} - \frac{(2a+1)\lambda}{x} \\ (2a+1)x^a y'(x) &= -\frac{a(2a+1)\lambda \ln(x)}{x} + (a-1)(2a+1) - \frac{a(2a+1)\mu}{x} + \frac{(2a+1)\lambda}{x} \\ a^2x^{a-1}y(x) &= \frac{a^2\lambda \ln(x)}{x} - a^2 + \frac{a^2\mu}{x} \end{array} \right.$$

Et par sommation, on trouve donc

$$\forall x > 0,\ x^{a+1}y''(x) + (2a+1)x^a y'(x) + a^2x^{a-1}y(x) = -1$$

On en déduit alors que les solutions de (E_a) sont précisément les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda \ln(x)}{x^a} - \frac{1}{x^{a-1}} + \frac{\mu}{x^a}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(d) En particulier, on vient de voir à la question précédente que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\frac{\ln(x)}{x} - 1 + \frac{\mu}{x} \end{matrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. On considère l'équation d'Euler (E_e). Soit f une solutions de (E_e). Donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\lambda \ln(x)}{x^e} - \frac{1}{x^{e-1}} + \frac{\mu}{x^e}$. Puis $f(1) = \mu - 1 = -1$ nous donne $\mu = 0$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\lambda \ln(x)}{x^e} - \frac{1}{x^{e-1}}$.

En dérivant, on trouve $\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\lambda - e\lambda \ln(x)}{x^{e+1}} + \frac{e-1}{x^e}$. Et la condition $f'(1) = \lambda + e - 1 = 2e - 1$ nous donne $\lambda = e$.

Finalement, on a

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{e\ln(x)}{x^e} - \frac{1}{x^{e-1}} = \frac{e\ln(x) - x}{x^e}$$

Problème 2 (Partie fractionnaire et densité) :

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par caractérisation de la partie entière, on sait que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Donc $0 \leq f(x) < 1$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On sait que $\lfloor x \rfloor + k \leq x + k$ et $\lfloor x \rfloor + k \in \mathbb{Z}$. Or $\lfloor x + k \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égale à $x + k$ (définition de la partie entière), donc $\lfloor x \rfloor + k \leq \lfloor x + k \rfloor$.

Par ailleurs, $\lfloor x + k \rfloor - k \leq x + k - k = x$. Grâce à la définition de la partie entière (et plus précisément à la définition d'un maximum), on en déduit donc $\lfloor x + k \rfloor - k \leq \lfloor x \rfloor$, puisque $\lfloor x + k \rfloor - k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $\lfloor x + k \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + k$. On a donc $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

Finalement, $f(x + k) = x + k - \lfloor x + k \rfloor = x + k - \lfloor x \rfloor - k = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
f(pf(x)) &= pf(x) - \lfloor pf(x) \rfloor \\
&= p(x - \lfloor x \rfloor) - \lfloor p(x - \lfloor x \rfloor) \rfloor \\
&= px - p\lfloor x \rfloor - \lfloor px - p\lfloor x \rfloor \rfloor \\
&= px - p\lfloor x \rfloor - \lfloor px \rfloor + p\lfloor x \rfloor && \text{car } p\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ et cf démo } 1b \\
&= px - \lfloor px \rfloor \\
&= f(px)
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = 0 \iff x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Donc $qx = p \in \mathbb{Z}$. Et donc $f(qx) = 0$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(qx) = 0$. Par la question précédente, on sait donc que $qx \in \mathbb{Z}$. On pose $p = qx \in \mathbb{Z}$. Alors $x = \frac{p}{q}$ et donc $x \in \mathbb{Q}$.

3. Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition de F_x, on sait que

$$\{0, f(x), f(2x), \ldots, f((q-1)x)\} \subset F_x$$

car $f(qx) = f(p) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $\exists r \in \{0, \ldots, q-1\}$ et $a \in \mathbb{Z}$ tels que $n = aq + r$. Alors $f(nx) = f(aqx + rx)$. Mais $aqx = ap \in \mathbb{Z}$. Donc par la question 1b, $f(nx) = f(rx) \in \{0, f(x), \ldots, f((q-1)x)\}$.

Donc $F_x = \{0, f(x), \ldots, f((q-1)x)\}$ et F_x est fini.

4. Soit $x \notin \mathbb{Q}$.

(a) D'abord, $F_x \neq \emptyset$ puisque $f(x) \in F_x$. Ensuite, on sait, par la question 1a, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(nx) \geq 0$. Donc 0 est un minorant de F_x. Et donc $\inf F_x$ existe par propriété de la borne inférieure de $\mathbb{R}$. On pose $\alpha = F_x$.

(b) On suppose $\alpha > 0$. On note $E = \{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geq 1\}$. On pose $n = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$. Alors $n\alpha > \frac{1}{\alpha}\alpha = 1$. Donc $n \in E$. Donc $E \neq \emptyset$.

Donc E est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, donc il admet un plus petit élément. On note $m = \min\{k \in \mathbb{N},\ k\alpha \geq 1\}$.

On a $m \neq 0$ puisque $0 \times \alpha = 0 < 1$. Par définition de m, on a $m - 1 \notin E$. Autrement dit $(m-1)\alpha < 1$. Ce qui nous donne $m\alpha < \alpha + 1$ et donc $\alpha < \frac{\alpha+1}{m}$.

(c) On rappelle que $\alpha = \inf F_x$. Comme $\frac{\alpha+1}{m} > \alpha$, $\frac{\alpha+1}{m}$ n'est pas un minorant de F_x. Donc, par caractérisation de la borne inférieure (appliqué à $\varepsilon = \frac{\alpha+1}{m} - \alpha > 0$), on sait qu'il existe $y \in F_x$ tel que $\alpha \leq y < \frac{\alpha+1}{m}$.

Et finalement, par définition de F_x, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = f(n_0 x)$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha \leq f(n_0 x) < \frac{\alpha+1}{m}$.

(d) En multipliant par m, on a donc $m\alpha \leq mf(n_0 x) < \alpha + 1$. Mais $m = \min\{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geq 1\}$. Donc $m\alpha \geq 1$. Donc $1 \leq m\alpha \leq mf(n_0 x) < \alpha + 1$. La croissance de la partie entière nous donne alors $1 \leq \lfloor mf(n_0 x) \rfloor$.

On en déduit alors $f(mf(n_0 x)) = mf(n_0 x) - \lfloor mf(n_0 x) \rfloor < \alpha + 1 - 1 = \alpha$.

(e) Par la question 1c, on a aussi $f(mf(n_0x)) = f(mn_0x)$. Et $m, n \in \mathbb{N}^*$. Donc $f(mn_0x) \in F_x$. Et pourtant $f(mn_0x) < \alpha = \inf F_x$. On a donc une contradiction.

Par conséquent, l'hypothèse supplémentaire que l'on a faite est fausse, c'est à dire $\alpha \leq 0$. Mais 0 est un minorant de F_x (cf question 4a). Donc $0 = \inf F_x$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

5. Soit $x \notin \mathbb{Q}$.

(a) Soit $\lambda > 0$. Alors $\lambda > \inf F_x$ d'après la question précédente. Donc par caractérisation de la borne sup dans $\mathbb{R}$ (appliqué à $\varepsilon = \lambda > 0$), $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leq f(nx) < \lambda$. Mais $f(nx) = 0$ implique $nx \in \mathbb{Z}$. Ce qui impliquerait $x \in \mathbb{Q}$. Ce qui est absurde. Donc $f(nx) \neq 0$. Finalement, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < f(nx) < \lambda$.

(b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < b < 1$. Donc $b - a > 0$. Par la question précédente, on sait donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < f(nx) < b - a$.

Comme $f(nx) > 0$, on peut considérer l'ensemble $E' = \{k \in \mathbb{N}, kf(nx) > a\}$. Cet ensemble est non vide (il suffit de prendre $k = \left\lfloor \frac{a}{f(nx)} \right\rfloor + 2$ par exemple). Il admet un plus petit élément que l'on nomme p. Donc $pf(nx) > a$ (on remarquera que $p \geq 1$ par un raisonnement fait plus haut). Mais $(p-1)f(nx) \leq a$. Donc $pf(nx) \leq a + f(nx) < a + b - a = b$. Donc $a < pf(nx) < b$.

Comme $0 < a < b < 1$, on a en particulier $0 < pf(nx) < 1$. Donc $\lfloor pf(nx) \rfloor = 0$. Donc $f(pf(nx)) = pf(nx)$. Mais par la question 1c, $f(pf(nx)) = f(pnx)$. Donc $pf(nx) = f(pnx)$.

Finalement $a < f(pnx) < b$. Et $p, n \in \mathbb{N}^*$ donc $f(pnx) \in F_x$.

Problème 3 (Trois méthodes de simplifications d'une expression) :
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

On se propose de donner une expression simple de f par trois méthodes différentes.

1. Première méthode : Étude de fonction

(a) $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$. $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Et $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Par ailleurs, on a le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	2	$+$	
$1-x$		$+$	2	$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc par composition, $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est définie sur $[-1, 1[$.

Finalement, f est définie sur $[-1, 1] \cap [-1, 1[= [-1, 1[$.

(b) On sait que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$, $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc, par composition, $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est dérivable en tout $x \in [-1, 1[$ tel que $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Donc, d'après la tableau de signe de la question précédente, $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est dérivable sur $]-1, 1[$.

Finalement, par composée, puis sommes d'applications dérivables, f est dérivables sur $]-1,1[$. Et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2\frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x}{1-x+1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{2}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{1-x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc f est une fonction constante sur $]-1,1[$. Or $f(0) = -2\arctan(1) = -\frac{\pi}{2}$ et f est continue sur $[-1,1[$, donc

$$\forall x \in [-1,1[,\ f(x) = \arcsin(x) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

2. Deuxième méthode : avec des fonctions hyperboliques :

(a) On a $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective et $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1,+\infty[$ surjective mais non injective. Donc, par quotient d'applications dont le dénominateurs ne s'annule pas, $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ -2e^{-x} < 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -e^{-x} < e^{-x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} - e^{-x} < e^{x} + e^{-x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) < \mathrm{ch}(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) < 1
\end{aligned}$$

car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1 > 0$.

Et de même,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ 2e^{x} > 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -e^{x} < e^{x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -e^{-x} - e^{x} < e^{x} - e^{-x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -\mathrm{ch}(x) < \mathrm{sh}(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -1 < \mathrm{th}(x).
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) \in]-1,1[$.

(On aurait pu le montrer à partir de l'étude de th en dérivant et en faisant un tableau de variations).

(b) On pourrait montrer que th est bijective en faisant une étude de fonction.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$ tel que $\mathrm{th}(x) = y$. On résout cette équation d'inconnue x.

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) = y &\iff \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = y \\
&\iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \\
&\iff e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1) \\
&\iff (1-y)e^{2x} = 1 + y \\
&\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} && \text{car } y < 1 \\
&\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) && \text{cf étude signe 1a}
\end{aligned}$$

On note alors $\operatorname{argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. D'après l'étude de signe de 1a, argth est bien définie sur $]-1,1[$. Et d'autre part, par le calcul précédent, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argth}(\operatorname{th}(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{th}(\operatorname{argth}(x)) = x.$$

Donc $\operatorname{argth} \circ \operatorname{th} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$ et $\operatorname{th} \circ \operatorname{argth} = \operatorname{Id}_{]-1,1[}$. D'où l'on déduit, par caractérisation de la bijectivité, que th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et que

$$\operatorname{th}^{-1} = \operatorname{argth} : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{array}$$

(c) Soit $y, z \in \mathbb{R}$. On a $\operatorname{th}(y) \in]-1,1[$ donc en particulier $\operatorname{th}(y) \neq 1$. On résout l'équation en y :

$$\begin{aligned}
&\frac{1+\operatorname{th}(y)}{1-\operatorname{th}(y)} = e^z \\
\iff\ & \frac{1+\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}{1-\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}} = e^z \\
\iff\ & \frac{e^{2y}+1+e^{2y}-1}{e^{2y}+1-e^{2y}+1} = e^z \\
\iff\ & e^{2y} = e^z \\
\iff\ & 2y = z && \text{bijectivité de exp}
\end{aligned}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\cos(2\arctan(e^x)) &= 2\cos(\arctan(e^x))^2 - 1 \\
&= \frac{2}{1+e^{2x}} - 1 \\
&= \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} \\
&= -\operatorname{th}(x).
\end{aligned}$$

(e) Soit $x \in]-1,1[$. On pose $y = \operatorname{argth}(x) \in \mathbb{R}$. Alors $x = \operatorname{th}(y)$ par bijectivité de la fonction th et parce que $\operatorname{th}^{-1} = \operatorname{argth}$. Alors, d'après la question précédente, $e^{2y} = \frac{1+\operatorname{th}(y)}{1-\operatorname{th}(y)}$.

Finalement,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arcsin(x) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \\
&= \arcsin(\operatorname{th}(y)) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}(y)}{1-\operatorname{th}(y)}}\right) \\
&= \arcsin(\operatorname{th}(y)) - 2\arctan\left(\sqrt{e^{2y}}\right) \\
&= \arcsin(\operatorname{th}(y)) - 2\arctan(e^y)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, $\cos(2\arctan(e^y)) = -\operatorname{th}(y)$. Mais $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ et arctan est impaire et croissante. Donc $\arctan : \mathbb{R}_+ \to [0, \pi/2[$. Donc $2\arctan(e^y) \in]0,\pi[$. Or $\cos|_{[0,\pi]}$ est bijective et $\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$. Donc $2\arctan(e^y) = \arccos(-\operatorname{th}(y))$.

On en déduit

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arcsin(\operatorname{th}(y)) - \arccos(-\operatorname{th}(y)) \\
&= -(\arcsin(-\operatorname{th}(y)) + \arccos(-\operatorname{th}(y))) && \text{imparité } \arcsin \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

3. Troisième méthode : Avec des fonctions circulaires.

(a) Soit $x \in [-1,1[$. $\cos$ est strictement décroissante sur $]0,\pi]$, donc $\cos$ est injective et $\cos(]0,\pi]) = [\cos(\pi), \cos(0)[= [-1,1[$. Donc $\cos$ établit une bijection de $]0,\pi]$ sur $[-1,1[$. D'où pas bijectivité, $\exists! \theta \in]0,\pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.

(b) Soit $x \in [-1,1[$. Soit $\theta \in]0,\pi]$ unique d'après la question précédente, tel que $x = \cos(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arcsin(x) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \\
&= \arcsin(\cos(\theta)) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}}\right) \\
&= \arcsin(\sin(\pi/2-\theta)) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{2\cos(\theta/2)^2}{2\sin(\theta/2)^2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \theta - 2\arctan\left(\frac{1}{\tan(\theta/2)}\right) && \text{car } \tfrac{\pi}{2}-\theta \in [-\pi/2,\pi/2[\\
& && \text{et } \cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \geq 0 \\
&= \frac{\pi}{2} - \theta - 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\tan(\theta/2))\right) && \text{car } \tan(\theta/2) > 0 \\
& && \text{car } \theta/2 \in]0,\pi/2] \\
&= \frac{\pi}{2} - \theta - \pi + \theta \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 4 (BONUX) :

Soit $x \in \mathbb{R}$ solution. On a automatiquement $x > 0$ car la partie entière est croissante. De plus, comme ce sont des entiers, deux d'entre eux sont nuls. Par croissance de la partie entière, on a donc $\lfloor 1/x \rfloor = \lfloor 2/x \rfloor = 0$ et $\lfloor 3/x \rfloor = 1$.

Puis $\lfloor 2/x \rfloor = 0 \iff 0 \leq 2/x < 1 \iff x > 2$.

Et $\lfloor 3/x \rfloor = 1 \iff \frac{3}{2} < x \leq 3$.

Donc $x \in]3/2,3] \cap]2,+\infty[=]2,3]$.

Réciproquement, si $2 < x \leq 3$, alors $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$. On obtient alors facilement $\lfloor 1/x \rfloor = \lfloor 2/x \rfloor = 0$ et $\lfloor 3/x \rfloor = 1$.