DM 4
De la suite dans les idées

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 19 Novembre 2024

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - x^2$.

1. (a) Déterminer les points fixes de f. On les notera α et β avec $\alpha < \beta$.
   (b) Démontrer que les intervalles $[0,1]$, $]\alpha,1]$ et $]-\infty,\alpha]$ sont stables par f.
2. On considère la fonction $g = f \circ f$.
   (a) Étudier sur l'intervalle $[0,1]$, les variations de g et le signe de $x \mapsto g(x) - x$.
   (b) Soit v une suite telle que $v_0 \in [0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite v est convergente, et préciser sa limite suivant la valeur de v_0.
3. On considère ici une suite réelle u telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.
   (a) On suppose $u_0 \in [0,1]$. Montrer que si $u_0 \neq \beta$, la suite u est divergente (en étant bien précis sur la nature de la divergence). On pourra s'aider des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Et si $u_0 = \beta$?
   (b) On suppose $u_0 \in]\alpha, 0[$.
      i. Montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \in [0,1]$ à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
      ii. En déduire le comportement de la suite u, suivant la valeur de u_k.
   (c) On suppose $u_0 = \alpha$. Que dire de la suite u ?
   (d) On suppose $u_0 < \alpha$. Étudier la monotonie de la suite u. En déduire qu'elle admet une limite et la préciser.
   (e) On suppose $u_0 > 1$. Montrer que $u_1 < 0$. Préciser, suivant la valeur de u_0, le comportement de la suite u (on pourra utiliser la parité de f).
4. On se propose de montrer, indépendamment de la question 3, que la suite u ne peut être convergente dans $\mathbb{R}$ que si elle est stationnaire.

   On va raisonner par l'absurde, en supposant que la suite u converge vers un réel ℓ, et qu'elle ne prend jamais la valeur ℓ.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = |u_n - \ell|$.

   (a) Montrer que ℓ est un point fixe de f et que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |2\ell|$.
   (b) Montrer que $|2\ell| > 1$ et en tirer une contradiction.
   (c) Conclure en prouvant que, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors u est stationnaire en ℓ.