DM 4

De la suite dans les idées

Correction

Simon Dauguet

simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 12 Novembre 2024

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - x^2 \end{array}$$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Donc $1 - x^2 = x \iff x^2 + x - 1 = 0$. On a $\Delta = 1 + 4 = 5$ donc $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Donc f a deux points fixes qui sont $\alpha = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$.

   (b) f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (et continue) donc $f([0,1]) = [f(1), f(0)] = [0,1]$. Donc $[0,1]$ est intervalle stable par f.

   f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ (et continue) donc $f(]-\infty, \alpha]) =]\lim_{x \to -\infty} f(x), f(\alpha)]) =]-\infty, \alpha]$ car α est un point fixe de f. Donc $]-\infty, \alpha]$ est intervalle stable par f.

   On vient de voir que $f([0,1]) = [0,1]$. Et par croissance de f sur $\mathbb{R}_-$, $f(]\alpha, 0]) =]f(\alpha), f(0)] =]\alpha, 1]$. Or $\alpha < 0$, donc $[0,1] \subset]\alpha, 1]$. Donc $f([0,1]) \subset]\alpha, 1]$. D'où $f(]\alpha, 1]) = f(]\alpha, 0] \cup [0,1]) =]\alpha, 1]$. Et donc $]\alpha, 1]$ est encore un intervalle stable par f.

2. Soit $g = f \circ f$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(f(x)) = 1 - f(x)^2 = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2)$.

   (a) On pose $\varphi = g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 4x(1 - x^3)$$

   D'où l'on a le tableau de variations sur $[0,1]$:

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
g	0	$\nearrow$	1

   De plus, on a

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = 2x^2 - x^4 - x = x(2x - x^3 - 1) = -x(x-1)(x^2 + x - 1)$$

   Or les racines de $X^2 + X - 1$ sont α et β, donc on déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$		α		0		β		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit en particulier que $\forall x \in [0, \beta]$, $g(x) \leq x$ et $\forall x \in [\beta, 1]$, $g(x) \geq x$.

(b) Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $v_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$.

D'après la question 1a, $[0, 1]$ est un intervalle stable par f. Donc $g([0, 1]) = f(f([0, 1])) = [0, 1]$. Donc $[0, 1]$ est un intervalle stable par g. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$.

De plus, g est croissante sur $[0, 1]$, d'après le tableau de variations de la question précédente. Donc v est monotone.

Or v est bornée ($\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$). Donc v est convergente par théorème de la limite monotone.

Soit $x \in [0, 1]$ tel que $g(x) = x \iff \varphi(x) = x \iff x \in \{0, \beta, 1\}$ d'après la question précédente. Donc v converge vers 0, 1 ou β.

Si $v_0 \in [0, \beta[$. Alors, d'après la question précédente, $g(v_0) = v_1 \leq v_0$. Donc la suite v est décroissante. Elle est en particulier majoré par $v_0 < \beta < 1$. Donc v ne peut pas converger vers β ni vers 1 (sinon $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $v_n > v_0$ ☠). Donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $v_0 = \beta$, alors la suite v est constante (égale à β) puisque β est un point fixe de f donc aussi un point fixe de g.

Si $v_0 \in]\beta, 1]$, alors $g(v_0) = v_1 \geq v_0$ d'après la question précédente. Donc v est croissante. Elle est en particulier minorée par $v_0 > \beta$, donc elle ne peut pas converger vers β ou 0. Donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

3. On considère une suite u telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

(a) On suppose $u_0 \in [0, 1]$. Comme $[0, 1]$ est un intervalle stable pour la fonction f et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

On note que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = f(f(u_n)) = g(u_n)$ et $u_{2n+3} = f(f(u_{2n+1})) = g(u_{2n+1})$. Donc d'après la question précédente, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Supposons $u_0 \in [0, \beta[$. D'après la question précédente, on a alors $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et $u_1 = f(u_0) \in]\beta, 1]$. Donc d'après l'étude des suites de la question précédente, on a $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Finalement, u diverge (sinon $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ aurait la même limite en tant que sous-suite d'une suite convergente, ce qui n'est pas le cas). Donc u est une suite divergente et ne tend pas vers $\pm\infty$.

Si $u_0 = \beta$, alors la suite u est une suite constante égale à β.

(b) On suppose $u_0 \in]\alpha, 0[$.

i. On a $u_1 = f(u_0) \in f(]\alpha, 0[) =]\alpha, 1[$. Or $]\alpha, 1]$ est un intervalle stable par f d'après la première question. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]\alpha, 1[$.

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin [0, 1]$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]\alpha, 1]$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]\alpha, 1] \setminus [0, 1] =]\alpha, 0[$.

Or f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et donc en particulier sur $]\alpha, 0[$. Donc u est monotone. Mais u est bornée, donc elle est convergente par théorème de la limite monotone. Et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$, on en déduit que (u_n) est décroissante, toujours par théorème de la limite monotone.

Mais si on considère $\psi(x) = f(x) - x = 1 - x^2 - x$, on la tableau de signe :

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f(x)-x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

Donc en particulier $\forall x \in]\alpha, 0[$, $f(x) > x$. En particulier $u_1 = f(u_0) > u_0$. Donc la suite est croissante. D'où ☠.

On en déduit donc que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [0, 1]$.

ii. D'après la question 3a, si $u_k = \beta$, alors la suite u est stationnaire en β et donc convergente. Mais si $u_k \in [0, 1]$ avec $u_k \neq \beta$, alors la suite u est divergente.

(c) On suppose $u_0 = \alpha$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha$ puisque α est un point fixe de f. Donc la suite u est constante et donc en particulier convergente.

(d) On suppose $u_0 < \alpha$. Comme $]-\infty, \alpha]$ est un intervalle stable par f, la suite u est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \alpha$.

Par ailleurs, f est croissante sur $]-\infty, \alpha]$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

D'autre part, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)-x = 1-x^2-x = -(x-\alpha)(x-\beta)$. Donc $\forall x \in]-\infty, \alpha[$, $f(x)-x < 0$ et donc $u_1 = f(u_0) < u_0$. Donc la suite u est décroissante.

Par théorème de la limite monotone, u est convergente si et seulement si u est minorée. Supposons u minorée. Donc elle converge vers un point fixe de f. Or, par décroissance, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0 < \alpha$. Donc ☠. Donc u n'est pas minorée.

De nouveau par théorème de la limite monotone, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

(e) On suppose $u_0 > 1$. Alors $u_0^2 - 1 > 0$. Donc $u_1 = f(u_0) = 1 - u_0^2 < 0$.

Si $1 < u_0 < \sqrt{1-\alpha}$, alors $0 < u_0^2 - 1 < -\alpha$ et donc $u_1 \in]\alpha, 0[$. On peut alors appliquer la question 3b et la suite u est soit stationnaire en β, soit divergente.

Si $u_0 = \sqrt{1-\alpha}$, alors $u_1 = 1 - u_0^2 = \alpha$ et donc la suite u est stationnaire en α à partir du rang 1.

Si $u_0 > \sqrt{1-\alpha}$, alors $u_1 = 1 - u_0^2 < \alpha$ et d'après la question précédente, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

4. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = |u_n - \ell|$.

(a) On a toujours, par définition de u, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. En passant à la limite et par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$. Donc ℓ est un point fixe.

Et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{w_{n+1}}{w_n} = \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \left|\frac{f(u_n)-f(\ell)}{u_n-\ell}\right|.$$

Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier f est dérivable en ℓ. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2x$. Donc, par définition de la dérivabilité,

$$\frac{f(x)-f(\ell)}{x-\ell} \xrightarrow[x\to\ell]{} -2\ell.$$

D'où, par composition dans les limites,

$$\left|\frac{f(u_n)-f(\ell)}{u_n-\ell}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |2\ell|$$

et donc aussi $\frac{w_{n+1}}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2|\ell|$.

(b) On sait que les deux seuls points fixes de f sont $\alpha = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Or $\alpha < -\frac{1+2}{2} = -3/2$. Donc $2|\alpha| > 3$. Et aussi $\beta > \frac{2-1}{2} = 1/2$. Donc $2\beta > 1$.

Dans les deux cas $2|\ell| > 1$. Or $\frac{w_{n+1}}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2|\ell|$. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{w_{n+1}}{w_n} > 1$. D'où $\forall n \geq n_0$, $w_{n+1} > w_n$. Donc en particulier, $\forall n > n_0$, $w_n > w_{n_0} = |u_{n_0} - \ell| > 0$.

Mais on a également $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ par hypothèse. Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$, $w_n = |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = w_{n_0}/2 > 0$, on a donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$, $0 < w_n \leq \frac{w_{n_0}}{2}$.

Finalement, $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$, $w_{n_0} < w_n \leq \frac{w_{n_0}}{2}$, ce qui mène à $w_{n_0} < 0$ et donc ☠.

(c) On vient de montrer que si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$, alors ☠.

Par conséquent, si u est convergente vers ℓ, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \ell$ (sinon ☠).
Or ℓ est un point fixe de f (car f est continue). Et donc la suite u est stationnaire.