NOM :
Prénom :

Mardi 03 Décembre 2024

Interrogation 10

Espaces Vectoriels

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de l'espace engendré par une famille de vecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $e_1, \ldots, e_n \in E$. L'espace vectoriel engendré par $(e_1, \ldots, e_n)$, noté $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est défini par

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

2. Caractérisation des sev.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $F \subset E$. Alors F est un sev de E si, et seulement si, $0_E \in F$ et $\forall x, y \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x + y \in F$.

3. Définition d'une somme directe.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F, G sev de E. On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$.

4. Caractérisation des sommes directes.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F, G sev de E. Alors $F \cap G = \{0\}$ (ie F et G sont en somme directe) si, et seulement si, $\forall x \in F + G$, $\exists! (f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$.

5. Définition de sevs supplémentaires.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F, G sev de E. F et G sont dits supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.

6. Espaces engendrés et inclusion.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, soit $A, B \subset E$. Alors $A \subset B \implies \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.

7. Espaces engendrés par une réunion.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $A, B \subset E$. Alors $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.

8. Définition d'une famille libre.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $e_1, \ldots, e_n \in E$. Les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont dit linéairement indépendants (ou la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre) si $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Exercice 2 :
Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)\}$. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-ev. Soit $G = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1)$. Montrer que F et G sont en somme directe.

$O_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F$ car $0 = 0 + 0$. Soit $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R},\ (\lambda f + g)(x+y) &= \lambda f(x+y) + g(x+y) && \text{def opé entre fct} \\
&= \lambda(f(x) + f(y)) + (g(x) + g(y)) && \text{car } f, g \in F \\
&= (\lambda f(x) + g(x)) + (\lambda f(y) + g(y)) && \text{car } (\mathbb{R}, +, \times) \text{ anneau} \\
&= (\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y) && \text{def oprétaion entre fct}
\end{aligned}$$

Donc par définition de F, $\lambda f + g \in F$. Donc F est stable par combinaison linéaire et $F \neq \emptyset$. Donc par caractérisation des sev, F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En particulier, F est un $\mathbb{R}$-ev.

Soit $f \in F \cap G$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda$ (par définition de G). Or $f \in F$. Donc, par définition de F, $\lambda = \lambda + \lambda$. Donc $\lambda = 0$. Donc $f = 0$. Donc $F \cap G \subset \{0\}$. Or F et G sont des sevs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc $(x \mapsto 0) \in F \cap G$. D'où $F \cap G = \{0\}$. Donc F est G sont en somme directe.