Chapitre 11 - TD :
Applications Linéaires

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

3 décembre 2024

1 Applications linéaires

Exercice 1 :
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x+y+2z \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y+1 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x-z \end{array}$$

Exercice 2 :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) := (x+y, x-y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et donner sa réciproque.

Exercice 3 :
On note $\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dérivable$\}$. Soit $\varphi : \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\psi : \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u$ convergente$\} \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi(f) := f'(0)$ et $\psi(u) := \lim_{n\to+\infty} u$. Montrer que ces applications sont des formes linéaires.

Exercice 4 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to E$. Montrer que

$$f \text{ linéaire} \iff \forall x,y,z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x+y)+f(\lambda z) = f(x)+f(y)+\lambda f(z).$$

2 Noyau, Image

Exercice 5 :
On pose $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On considère $\varphi, \psi : E \to E$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\varphi(u))_n := u_{n+1} - u_n \qquad \text{et} \qquad (\psi(u))_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1. Montrer que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Calculer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
3. Déterminer les images et noyaux de φ et ψ.

Exercice 6 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

1. $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \ker g$
2. $\ker(f) \subset \ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$ et $g(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$
3. Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f+g)$
4. Comparer $\operatorname{Im}(f+g)$ et $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$
5. Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$
6. Comparer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2$

Exercice 7 ([✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sev de E. Montrer que

$$f(A) \subset f(B) \implies A + \ker f \subset B + \ker f$$

Exercice 8 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et $\ker u$
2. Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et $\operatorname{Im} u$.
3. À quelle condition a-t-on $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$.

Exercice 9 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$f^2 - 3f + 2\operatorname{Id}_E = 0$$

1. Montrer que f est inversible et exprimer f^{-1}.
2. Montrer que $\ker(f - \operatorname{Id}_E)$ et $\ker(f - 2\operatorname{Id}_E)$ sont des sev supplémentaires de E.

Exercice 10 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente, *i.e.* telle que $\exists n \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^n = 0$.
Montrer alors que $\operatorname{Id}_E - f \in \operatorname{GL}(E)$ et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 11 ([✓]) :
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E vérifiant $f^3 = \operatorname{Id}_E$. Montrer que

$$\ker(f - \operatorname{Id}_E) \oplus \ker(f^2 + f + \operatorname{Id}_E) = E$$

3 Dimension finie

Exercice 12 :
Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) := (y - z, z - x, x - y)$

2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) := (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) := z + i\overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

Exercice 13 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}, \ \sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0.$$

Exercice 14 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E
2. $E = \operatorname{Im} f + \ker f$
3. $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im} f$
4. $\ker(f^2) = \ker f$.

Exercice 15 ([✓]) :
Justifier qu'il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 0), \quad f(1, 1, 1) = (1, 1)$$

Exprimer alors $f(x, y, z)$ et déterminer son image et son noyau.

Exercice 16 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On note

$$\mathcal{C} := \{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une sev de $\mathcal{L}(E)$
2. Montrer que
$$\mathcal{C} = \{a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}, a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\}$$
3. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$

Exercice 17 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer

$$\ker f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2 \operatorname{rg} f$$

Exercice 18 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f + g \in \operatorname{GL}(E)$ et $g \circ f = 0$. Montrer que

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$$

Exercice 19 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose

$$\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g = E$$

Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 20 (Pseudo-inverses [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que

$$g \circ f \circ g = g \quad \text{et} \quad f \circ g \circ f = f$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \ker g = E$
2. Établir que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

Exercice 21 :
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \geq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(F).$$

Exercice 22 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer que $\exists! \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

Exercice 23 (Base antéduale (*)) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Le but de cet exercice est de montrer qu'à toute base de E^* est associée une base de E qui s'appelle la base antéduale. Autrement dit, le but est de montrer qu'à toute base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E^*, il existe une unique base $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(f_1, \ldots, f_n)$ est la base duale associée à la base $(e_1, \ldots, e_n)$. La base $\mathcal{B}$ s'appelle la base antéduale de $(f_1, \ldots, f_n)$.
Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E^*.

1. Montrer que les noyaux des formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ sont deux à deux distincts.
2. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $H_1, \ldots, H_k$ des hyperplans de E, deux à deux distincts. Montrer que
$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right) = n - k.$$
3. Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $D_i := \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \ker(f_j)$ est une droite vectorielle.
4. Construire la base antéduale de $(f_1, \ldots, f_n)$.

4 Projecteurs, Symétries

Exercice 24 :
Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui même définie par

$$p(x, y, z) := (-2x - 6z, x + y + 2z, x + 3z)$$

Montrer que p est un projecteur. Déterminer $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$.

Exercice 25 :
Dans chacun des cas suivants, montrer que F et G sont supplémentaires dans E puis calculer la projection sur F parallèlement à G

1. $E := \mathbb{R}^2$, $F := \operatorname{Vect}(0, 1)$, $G := \operatorname{Vect}(1, 0)$
2. $E := \mathbb{R}^2$, $F := \operatorname{Vect}(1, 0)$, $G := \operatorname{Vect}(1, 1)$
3. $E := \mathbb{R}^3$, $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = z\}$, $G := \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$

4. $E := \mathbb{R}^3$, $F := \mathrm{Vect}(1,1,0)$, $G := \mathrm{Vect}((0,1,1),(-1,0,3))$

Exercice 26 :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q + q \circ p = 0$.
2. On suppose $p \circ q = 0$. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\ker(p) \cap \ker(q)$.