Chapitre 11 - TD :

Applications Linéaires

Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

11 décembre 2023

1 Applications linéaires

Exercice	Indications
1	Définition. Application du cours. C'est le début. Il faut faire connaissance.
2	Idem. Mais avec un peu de bijectivité. En plus, cet exemple a déjà été traité dans un autre chapitre. Mais on avait pas la linéarité à l'époque.
3	Attention à la manipulation. Attention à comment on justifie les choses. C'est juste pour s'habituer à ne pas manipuler que des nombres et voir la linéarité un peu partout.
4	Plein de quantificateurs ! Chouette ! C'est juste de la vérification. Il "suffit" d'écrire.

2 Noyau, image

Exercice	Indications
5	Attention à la manipulation, ici. Il s'agit de ne pas se tromper entre u_n et (u_n). Mais en prenant le temps d'écrire tout bien comme il faut, il n'y a pas de difficulté majeure.
6	Exercice fondamental. On utilise ça tous le temps. Impératif de savoir faire. Ce sont des questions de cours.
7	Théorie des ensembles et linéarité sont dans un bateau. Commencer par aborder les choses d'un point de vu théorie des ensembles. Et utiliser la structure d'ev dès qu'on peut. Et ça devrait tomber tout seul.
8	Rebelote. Théorie des ensembles et applications linéaires. C'est classique.
9	Attention, on n'est pas en dimension finie, a priori. Mais ce genre d'exercices a déjà été fait maintes fois dans les chapitres précédents. C'est juste la forme des sev qui a changé.
10	On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ est un anneau. Or on sait calculer dans un anneau. En particulier, on sait factoriser $1 - a^n$ dans un anneau.
11	Là non plus, on est pas en dimension finie. Mais c'est pas grave, on sait faire ce genre d'exo.

3 Dimension finie

Exercice	Indications
12	Définitions. Il suffit d'écrire proprement. À savoir faire.
13	E est de dimension finie. Combien y a-t-il de terme dans la somme ? Ça ne vous rappelle rien ? Comment faire pour traduire l'énoncé dans un autre langage ?
14	Ultra-classique. Et cette fois, on peut utiliser la dimension finie. Ça simplifie beaucoup les choses.
15	Il y a un théorème du cours qui répond à cette question. Lequel ? Comment l'appliquer ?
16	Pour la 2, il y a une inclusion qui est facile. Pour l'autre, il faut exploiter l'hypothèse sur f. Si on écrit un vecteur dans la base proposée et qu'on regarde son image par f, que se passe-t-il ? Attention en manipulant les sommes. Pour la 3, avec la 2, c'est facile.
17	Dimension finie. Plein de choses à dire.
18	Quel est le lien entre $\mathrm{Im}(f+g)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$? Attention aux définitions.
19	On est en dimension fini et on a des applications linéaires. Quel théorème DOIT-on utiliser ?
20	Montrer $\mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f)$. Et après, on peut conclure facilement puisqu'on est en dimension finie. Pour la 2, c'est une double inclusion. On peut la traiter directement sur les ensembles.
21	Il faut exploiter une démo d'un petit résultat du cours. Comment faire pour voir $g \circ f$ comme "presque" que du g ?
22	Définition du rang ?
23	1. C'est une question de cours. 2. C'est une question générale. Elle n'est pas directement à l'exercice. Il faut faire une récurrence finie sur le nombre d'hyperplans considérés. 3. Que sait-on des noyaux d'une forme linéaire ? 4. Les D_i sont des droites vectorielles. Ça devrait donner une idée de ce qu'on pourrait essayer de prendre. Il ne reste qu'à faire la vérification que tout se passe bien.

4 Projecteurs, symétries

24	Application du cours. C'est le début.
25	Définition, mais lue dans l'autre sens.
26	$\mathcal{L}(E)$ est un anneau. On sait calculer dedans. Et on utilise la caractérisation des projecteurs.