DS 4
Suites - Groupes, Anneaux, Corps

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 04 Décembre 2024

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Équivalent de Stirling) :
Le but de ce problème est de déterminer l'équivalent de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie I : Un équivalent à une constante près

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$
3. On introduit la fonction φ définie par
$$\forall t > 0,\ \varphi(t) = 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t}\right)\ln(1+t).$$
   (a) On pose $\psi(t) = 2t-(t+2)\ln(1+t)$. Par une double dérivation, déterminer le signe de ψ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) En déduire la décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. En déduire que la suite (u_n) converge. On appelle C la limite de la suite (u_n).
5. Justifier que $C \geq 0$.
6. Supposons que $C = 0$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln(u_n).$$

   (a) Que peut-on dire sur la convergence de (v_n) ?
   (b) Montrer que $\forall n \geq 2$, $v_{n+1} - v_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + n\right)\ln(1 + 1/n)$.
   (c) Montrer que $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
   (d) En déduire un encadrement de $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \geq 2$.
   (e) En déduire

$$\forall n \geq 2,\ -\frac{1}{12}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3} \leq v_{n+1} - v_2 \leq \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

   (f) En admettant (encore pour quelques semaines) que $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et en notant

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(2) \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(3) \in \mathbb{R},$$

   aboutir à une contradiction et conclure que $C > 0$.
7. En déduire finalement

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie II : Détermination de la constante C

On définit une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales de Wallis par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$$

En faisant alors un changement de variable et en utilisant la positivité de l'intégrale et la croissance de l'intégrale, on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n > 0 \qquad \text{et} \qquad (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

Il est facile aussi de calculer les premiers termes, et une double intégration par partie nous permet d'avoir :

$$\begin{cases} I_0 = \frac{\pi}{2} \\ I_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \end{cases}$$

8. Calculer I_2, I_3, I_4, I_5.
9. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n + 1)I_{n+1}I_n$. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante et donner sa valeur.
10. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \qquad \text{et} \qquad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n + 1)!}$$

11. En utilisant la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

12. En déduire un équivalent de J_n faisant intervenir I_n, puis en déduire
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
13. À l'aide de la partie I et de la suite $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, donner la valeur de la constante C.
14. Applications : Donner un équivalent simple et la limite des suites dont le terme général est
$$\alpha_n = \frac{n!}{n^n} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \frac{(n!)^2}{n^n}$$

Problème 2 (Étude de deux groupes isomorphes) :

1. **Un produit semi-direct**
   soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On munit G de la loi $*$ définie par :
   $$\forall (x,y) \in G,\ \forall (x',y') \in G,\ (x,y) * (x',y') = (xx', y + xy')$$
   (a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur G et qu'elle admet un élément neutre dans G, que l'on déterminera.
   (b) Montrer que $(G, *)$ est un groupe. Est-ce un groupe abélien ?
   (c) Soit $H = \mathbb{R}^* \times \{0\}$ et $K = \{1\} \times \mathbb{R}$. Montrer que H et K sont des sous-groupes de G.
2. **Les transformations affines de $\mathbb{R}$**
   On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe.
   Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que f est une application affine, si $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$. On note $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe.
3. **Un isomorphisme**
   Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$.
   (a) Montrer que $f_{a,b}$ est une application affine, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. À quelle condition est-elle bijective ?
   (b) Montrer que $F : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ définie par $F(a,b) = f_{a,b}$ est un morphisme de groupes.
   (c) Montrer que F est isomorphisme de groupes. En déduire que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe abélien.
4. **Les automorphismes intérieurs de G**
   (a) Soit $g \in G$ et $\varphi_g : G \to G$ définie par $\varphi_g(h) = g*h*g^{-1}$ (où g^{-1} est l'inverse de g pour $*$). Montrer que φ_g est un endomorphisme du groupe G, puis qu'il est bijectif. On donnera l'isomorphisme réciproque.
   (b) Montrer que le sous-groupe K est stable par φ_g pour tout $g \in G$. Qu'en est-il de H ?
   Si $g \in G$, on notera $\widetilde{\varphi_g}$ l'endomorphisme de K induit par φ_g (*i.e.* $\widetilde{\varphi_g} : K \to K$ et $\widetilde{\varphi_g}(k) = \varphi_g(k)$).
   (c) Montrer qu'en posant, pour tout $h \in H$, $\Phi(h) = \widetilde{\varphi_h}$, on définit un morphisme de groupes $(H, *)$ dans le groupe $(\mathrm{Aut}(K), \circ)$ des automorphismes de K.
   (d) Φ est-elle injective ?
