NOM :
Prénom :

Mardi 10 Décembre 2024

Lycée Loges

Interrogation 11

Dimensions Finies

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Théorème de la base incomplète.
toute famille libre d'un ev de dimension finie, peut être complétée en une base de cet ev.
2. Caractérisation des bases en dimension finie.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\mathcal{B}$ est une base de $E \iff \mathcal{B}$ est libre $\iff \mathcal{B}$ engendre E.
3. Définition du rang d'une famille de vecteurs.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $e_1, \dots, e_n \in E$. On définit le rang de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, noté $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n)$ par $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n))$.
4. Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit F, G deux sev de E tels que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Alors $F \oplus G = E \iff F + G = E \iff F \cap G = \{0\}$.
5. Formule de Grassmann.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F, G deux sev de E. Alors
$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$
6. Caractérisation de la liberté par le rang.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $e_1, \dots, e_n \in E$. Alors $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) \leq n$. Et $(e_1, \dots, e_n)$ libre $\iff \mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) = n$.
7. Principe d'extension d'une famille libre.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $e_1, \dots, e_n \in E$ linéairement indépendants. Soit $x \in E$. Alors $(e_1, \dots, e_n, x)$ libre $\iff x \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
8. Définition de la dimension d'un espace vectoriel.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie (engendré par une famille finie). On définit la dimension de E, noté $\dim(E)$, le nombre de vecteurs de n'importe quelle base de E (toutes les bases ont le même nombre de vecteurs).

Exercice 2 :
Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+t = y-t = 0\}$. Montrer que E est sev de $\mathbb{R}^4$ et donner la dimension de E.

On commence par étudier E :

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+t = y-t = 0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2y = 0 = y-t\} \\ &= \{(-2y, y, z, y),\ y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{-y(2,-1,0,-1) + z(0,0,1,0),\ y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((2,-1,0,-1),(0,0,1,0)). \end{aligned}$$

Donc E est un sev de $\mathbb{R}^4$ et $\dim(E) \leq 2$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda(2,-1,0,-1) + \mu(0,0,1,0) = 0 &\iff (2\lambda, -\lambda, \mu, -\lambda) = 0 && \text{opé } \mathbb{R}^4 \\ &\iff \lambda = \mu = 0 && \text{liberté base canonique } \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

Donc la famille $((2,-1,0,-1),(0,0,1,0))$ est une famille libre. Donc $((2,-1,0,-1),(0,0,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Donc, par définition de la dimension, $\dim(E) = 2$.