Chapitre 12 - TD : Limites, Continuité

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

10 décembre 2024

1 Limites et Continuité

Exercice 1 :
Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\arccos x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \tan(x)\tan(2x)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\lfloor x\rfloor}-1}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice 2 :
Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ périodique convergente en $+\infty$. Montrer que g est constante.

Exercice 3 (***) :
Soit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Soit $u_n(x)=\frac{x^n}{n!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$. Soit $x\in\mathbb{R}_+$ fixé. Montrer que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour $n\leq\lfloor x\rfloor$ et décroissante pour $n>\lfloor x\rfloor$.
3. En déduire que $\forall x\geq 0,\ f(x)=\frac{x^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!}$.
4. Montrer que f est continue.

Exercice 4 :
Étudier la continuité de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x\rfloor + (x-\lfloor x\rfloor)^2 \end{array}$$

Exercice 5 ([✓]) :
Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est totalement discontinue sur $\mathbb{R}$, i.e. qu'elle est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 ([✓]) :
Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$$

peut être prolongée par continuité en une fonction continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 7 :
Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{1/x + \sin(1/x)}$$

Montrer que f est prolongeable en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 ([✓]) :
On considère l'équation différentielle

$$ty' + y = e^t$$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Déterminer les solutions qui sont continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -\infty$.

Montrer que f admet une borne supérieure et qu'elle est atteinte.

Exercice 10 :
Soit $f \in \mathcal{F}([0,1],[0,1])$ définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $[0,1]$
2. Montrer que f est une bijection.

Exercice 11 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique.

Montrer que f est constante.

2 TVI and co.

Exercice 12 ([✓]) :
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue.

1. Montrer que f admet un point fixe.

   Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ telle que $f \circ g = g \circ f$. Soit F l'ensemble des points fixes de f.
2. Montrer que F admet un plus grand et un plus petit élément.
3. Montrer que F est stable par g.
4. Montrer que $\exists x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 13 ([✓]) :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x_1, \dots, x_n \in [0,1]$.
Montrer que $\exists x \in [0,1]$ tel que $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Exercice 14 (* [✓]) :
Soit une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue telle que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell < 1$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$, à l'aide d'une fonction auxiliaire judicieusement choisie.

Exercice 15 :
Montrer que toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 16 :
Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f est bornée et g continue.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 17 ([✓]) :
Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) < g(x)$$

Montrer $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x) - \alpha$

Exercice 18 ([✓]) :
Soit la fonction

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
2. Déterminer, pour $y \in]-1,1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de f.

Exercice 19 ([✓]) :
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que

$$f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. En déduire qu'elle est strictement croissante.
3. Montrer par l'absurde, que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq x$.
4. De même montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \leq x$.
5. Conclure.

Exercice 20 :
Deux étudiants révisent leur cours de SI d'électricité. Ils se souviennent $E(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$. Eugénie assure : "l'énergie E étant continue, l'intensité i doit également être continue". Mathis n'est pas convaincu. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 21 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(1)$. En remarquant que

$$\forall n \geq 1,\ f(1)-f(0)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

montrer que $\forall n \geq 2$, $\exists x_n \in [0,1]$ tel que $f(x_n)=f(x_n+1/n)$.

Exercice 22 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)|<1$.

1. Montrer que $\exists k \in [0,1[$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq k$.
2. Soit $(x_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$. Étudier $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)^n$.

3 Avec des équations fonctionnelles

Exercice 23 (Endomorphismes de $(\mathbb{R},+)$ continus [✓]) :
Le but de cet exercice est de déterminer les endomorphismes du groupe $(\mathbb{R},+)$ continus.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un endomorphisme de groupe continue en 0, c'est-à-dire dire une application continue en 0 telle que

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y).$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n)=nf(1)$.
3. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r)=rf(1)$.
4. En déduire une expression de f et conclure.

Exercice 24 ([✓]) :
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=f(x)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=x$ et $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2}$, montrer que cette suite est croissante si $x \leq 1$ et décroissante si $x \geq 1$.
2. Dans les deux cas en déduire que la suite est convergente et donner sa limite.
3. Montrer que f est constante.

Exercice 25 ([✓]) :
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 et 1 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=f(x^2)$.

1. Montrer que $\forall x>0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(x^{2^n}\right)=f(x)=f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$.
2. Montrer que f est constante sur $[0,1[$ et sur $[1,+\infty[$. En déduire que $f|_{\mathbb{R}_+}$ est constante.
3. Montrer finalement que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26 ([✓]) :
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et telle que $f(0)=1$. On suppose de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x)=f(x)\cos(x)$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \sin(x) f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
2. Montrer que l'on peut étendre la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ par continuité en une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que $f = \varphi$.

Exercice 27 :
Quelles sont les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$