Chapitre 12 - TD :

Limites, Continuité

Indications

Simon Dauguet

simon.dauguet@gmail.com

25 décembre 2023

1 Limite et Continuité

Exercice	Indications
1	C'est le bac. On a pas d'indications, quand on passe son bac.
2	C'est toujours le bac.
3	Entre la SI où les maths, qui peut-bien avoir raison ? Il s'agit maintenant de le prouver.
4	C'est juste des études de compositions de fonctions. On pourra avoir besoin de faire intervenir des fonctions auxiliaires.
5	1. Expression conjuguée. 2.$\arccos$ est une bijection. 3.Faire un changement de variable. 4.Théorème des gendarmes. 5.Trigo mon amour ... 6. Les gendarmes avec une disjonction de cas 7,8,9. N'y aurait-il pas des inégalités qu'on pourrait faire avec les parties entières ?...
6	Utiliser la caractérisation de la partie entière, puis le théorème des gendarmes.
7	1. Faire une disjonction de cas selon si $b \geq 1$ ou non. Dans le cas $b \geq 1$, on peut "coincer" b entre deux puissances de a successives. Puis, il suffit de faire appel aux gendarmes. Dans le cas $b < 1$, il suffit de souvenir que les physiciens savent changer les ampoules. 2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, il y a une fonction usuelle (très usée, d'ailleurs) qui marche très bien.
8	1. Clairement, il faut utiliser la définition de la limite. Attention à l'ordre des quantificateurs et donc l'ordre dans lequel faire les choses. 2. Quand on ne voit pas grand chose, regarder avec son télescope.
9	1. Il faut utiliser des ε. Puis écrire $f(n)/n$ à l'aide d'un télescopage faisant intervenir des éléments des hypothèses. Ensuite, on se débrouille avec ce qu'on a. Sans forcer. En faisant attention à l'ordre. Et en faisant attention à ce qui est fixé de ce qui ne l'est pas. Cette question ressemble un peu à la démo du théorème de Césaro du TD sur les suites. 2. C'est Bonus. Les indications aussi. C'est vraiment bonus. C'est quand on s'ennuie. Mais seulement dans ce cas.
10	Ne peut-on faire une suite divergente vers $+\infty$ à partir d'un $x \in \mathbb{R}$ est laquelle la fonction g est constante en utilisant la périodicité ?
11	Commencer par utiliser le th de la limite monotone pour justifier l'existence des demi-limites en tous les points. Ensuite, il ne reste "plus qu'à" montrer que ces limites correspondent aux valeur de la fonction en le point. Et pour ça, des raisonnements par l'absurde marchent bien.

12	1. Justifier que $\sup$ existe. Mais ça, on a des propriétés pour le faire. 2. C'est une étude de suite. Compte tenu de la forme de la suite, il devrait y avoir une méthode plus adaptée que les autres. On rappelle que x est fixé. 3. Compte tenu de la 2, ça ne devrait pas poser de soucis. 4. Il y a des parties entières. Mais on a des inégalités avec les parties entières. Attention à bien gérer les problèmes de discontinuité de la partie entière.
13	La partie entière vient automatiquement avec des inégalités.
14	La fonction partie entière a des points de discontinuité. Entre deux points de discontinuités éventuels, tout va bien se passer. Il reste à étudier les points de discontinuités. Mais on a pas "juste" la partie entière. Il y a donc un point de discontinuité qui sera un peu particulier. En fait, on va "perdre" un point de discontinuité.
15	Utiliser la densité des rationnels. Et des irrationnels dans les réels.
16	1. Il faut jouer sur les quantificateurs. Commencer par montrer que $f(1) \neq 0$. En déduire que f est injective. Et montrer enfin que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$ 2. À partir de l'équation fonctionnelle vérifiée par f, on montre facilement que f est un morphisme de groupe (revoir la définition de morphisme de groupe). Montrer ensuite que $\forall x \in]0,1[$, $f(x) > 1$. Puis en déduire que f est strictement décroissante (on rappelle que si $a < b$, alors $a/b < 1$). f est donc une application injective strictement décroissante. Donc ?... 3. C'est une question classique. On peut la faire directement, ou alors regarder $\ln \circ f$. Et celle là, on devrait la reconnaître.
17	C'est un jeu sur la quantificateurs dans la définition de la limite. Il faut bien choisir les variables qui apparaissent dans la définition de la limite. S'inpirer de la propriété sur les signes de deux suites équivalentes.
18	1. f est discontinuité en tous les points sauf en $1/2$ où elle est continue. Utiliser la densité des rationnels et des irrationnels. 2. On peut trouver sa réciproque (très) facilement. En fait, on l'a déjà.
19	Montrer que l'ensemble des périodes est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Mais on sait quelque chose sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$. À partir de là, utiliser cette propriété pour conclure.
20	C'est suffisamment détaillé.
21	1.Récurrence 2.Il faut le faire par étape, en suivant ce qu'indique la question. Attention à utiliser la bonne relation. La question précédente en donne deux. 3.On a déjà f constante sur $\mathbb{R}_+$. Il suffit maintenant d'étendre à $\mathbb{R}_-$. N'y a-t-il pas un moyen de se ramener à $\mathbb{R}_+$?

2 Prolongements

Exercice	Indications
22	Il y a un théorème du cours qui s'appelle "prolongement par continuité". Peut-être pourrait-il être utile ici ? Qui sait ...
23	Ne pas oublier les remarques du cours. Pour prolonger PAR CONTINUITÉ, il y a des sous-entendus. Par ailleurs, il y a un théorème de prolongement par continuité dans le cours. Il suffit de l'appliquer.
24	Idem. Attention aux sous-entendus pour le prolongement. Et appliquer le théorème *ad hoc*.
25	Voir le chapitre sur les équa diff pour la question 1. Pour la 2, attention aux quantificateurs. Il suffit de prendre une solution et de regarder ce qu'impose la continuité sur les paramètres qui définissent la solution considérée.
26	Utiliser la définition de la limite donnée pour appliquer ensuite le théorème des bornes atteintes. La difficulté étant la gestion des quantificateurs.

27	1.Récurrence 2.C'est classique. C'est presque une fonction de cours. 3.Utiliser la continuité de f et $f(0) = 1$. Cette question est une sorte de généralisation d'un exercice qui a été fait 2 ou 3 fois dans des TD précédents.

3 TVI and co.

Exercice	Indications
28	1.Utiliser une bonne fonction auxiliaire qui permet d'avoir des points fixes. 2.On parle ici de $\min$ et $\max$. Il faut montrer que $\sup F$ et $\inf F$ sont en fait atteint. Utiliser la caractérisation séquentielle de $\sup$ et $\inf$ avec la définition de F et la continuité de f. 3.C'est la commutativité de f et g. 4.Utiliser une fonction auxiliaire qui nous donnerait ce qu'il faut avec le TVI.
29	Utiliser le théorème des bornes atteintes pour encadrer la somme, puis appliquer le TVI.
30	L'indication est donnée : considérer une bonne fonction auxiliaire qui donne des points fixes. C'est toujours la même qu'on considère. Il appliquer le TVI sur cette fonction auxiliaire. Pour ça, montrer qu'elle tend vers $-\infty$ en $+\infty$.
31	Quel théorème peut-on appliquer sur un intervalle de longueur la période ? Que dire de l'image d'une application périodique par rapport à l'image d'un intervalle d'une longue la période ?
32	L'une des deux composition est triviale. Pour la seconde, il faut détailler un peu. Mais comme les deux fonctions sont continues, on devrait pouvoir appliquer le théorème des bornes atteintes.
33	Encore une bonne fonction auxiliaire. Considérer $h = g - f$ et appliquer le théorème des bornes atteintes sur h.
34	1.Commencer par la continuité avant tout. Puis, montrer que f est strictement monotone. À partir de là, c'est facile. Ne pas oublier l'image. 2.C'est du calcul.
35	1.$f \circ f$ est bijective. On sait ce qu'on peut en déduire depuis le chapitre sur la théorie des ensembles. 2.f est continue et bijective. Un théorème du cours nous permet de répondre presque complètement. Il ne reste plus qu'à "choisir". 3.L'indication est donnée. 4.Idem. 5.C'est assez évident avec les deux questions précédentes.
36	Ne pas oublier de prouver la remarque. Ce qui ne devrait pas être très compliqué. On fixe $n \geq 1$. Considérer la fonction auxiliaire $g_n : x \mapsto f(x + 1/n) - f(x)$. Puis, montrer que g_n s'annule avec un raisonnement par l'absurde.
37	1.Théorème des bornes atteintes. Attention à la manipulation des inégalités. 2.Avec la question précédente, ça ne devrait pas poser de problèmes.
38	4.On a égalité entre deux fonctions sur $\mathbb{Q}$. Les deux continues. Conclusion ?
39	Montrer que f est continue. Montrer ensuite que f est injective. Qu'en déduire ? Considérer ensuite $g : x \mapsto f(x) - f(0)$. Montrer que g vérifier les mêmes hypothèses que f. En déduire une expression de g. Et donc de f. Conclure.