DM 4

De la suite dans les idées

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 12 Novembre 2024

Problème 1 (Supplémentaires communs) :

1. Comme A et B sont des sev de E qui est un $\mathbb{K}$-ev de diension finie, A et B sont de dimension finie, ainsi que $A+B$. Et par la formule de Grassman, on a $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(C) = \dim(B) + \dim(C)$, d'où l'on déduit immédiatement $\dim(A) = \dim(B)$.

   Par ailleurs, la même formule de Grassmann nous donne aussi $\dim(C) = \dim(A+B) - \dim(A) = \dim(B) - \dim(A \cap B)$.

2. On suppose $A = B$. Donc $A + B = A = B$. Il suffit de prendre $C = \{0\}$ et le problème est résolu.

   On suppose donc maintenant $A \neq B$.

3. On suppose ici $\dim A = \dim B = n - 1$.

   (a) Comme $A \neq B$, on a nécessairement $A \not\subset B$. Sinon les deux sev serait égaux puisqu'ils ont la même dimension. On a, pour la même raison $B \not\subset A$.

   Mais $A \not\subset B$ signifie $\exists u \in A$ tel que $u \notin B$. Et de même, on a $\exists v \in B$ tel que $v \notin A$.

   (b) On pose $w = u + v \in A + B$. Supposons $w \in A \cup B$. Alors on a soit $w \in A$, soit $w \in B$. Si $w \in A$, alors $v = w - u \in A$ puisque A est un sev et est donc stable par addition. Mais on a montré que $v \notin A$. Donc une absurdité. Et la symétrie du problème en A et B nous donne aussi une contradiction si $w \in B$. Donc $w \notin A \cup B$.

   (c) On pose $C = \mathrm{Vect}(w)$. Comme $w \in A + B$ par définition de $A+B$, on en déduit donc que C est un sev de $A+B$. La question précédente nous fournit facilement $C \cap A = \{0\}$. En effet, si $x \in C \cap A$ avec $x \neq 0$, on a en particulier $x \in C = \mathrm{Vect}(w)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda w$. Mais comme $x \neq 0$, on a $\lambda \neq 0$. Mais $x \in A$ donc $w = \frac{1}{\lambda} x \in A$ puisque A est un sev. Ce qui aboutit à une contradiction d'après l'étude précédente. Par conséquent $x = 0$ et donc $C \cap A = \{0\}$.

   Enfin, $E = A + \mathrm{Vect}(v) \subset A + B$ donc $A + B = E$. Par conséquent $\dim(A+B) = n$ mais $\dim(A) + \dim(C) = n - 1 + 1 = n$. Donc par caractérisation des supplémentaires en dimension finie, on en déduit $A + B = E = A \oplus C$.

   La symétrie du problème en A et B nous permet d'aboutir de la même manière à $A + B = B \oplus C$.

4. On ne suppose plus que A et B sont des hyerplans.

   (a) On sait que $A \cap B$ est un sev de E puisque c'est une intersection de sev mais $A \cap B \subset A$ par définition de l'intersection. Donc $A \cap B$ est un sev de A. Par ailleurs, A est un $\mathbb{K}$-ev de dimension en tant que sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Donc $A \cap B$ admet un supplémentaire dans A. Autrement dit $\exists A' \subset A$ un sev de A (et donc de E) tel que $(A \cap B) \oplus A' = A$.

   On note B' un sev de B tel que $(A \cap B) \oplus B' = B$ par le même raisonnement.

(b) Soit $x \in A' \cap B'$. $x \in A' \subset A$ et $x \in B' \subset B$. Donc $x \in A \cap B$. Donc $x \in (A \cap B) \cap A' = \{0\}$. Donc $x = 0$ et donc $A' \cap B' = \{0\}$.

La formule de Grassmann dans le cas particulier de sev en somme directe nous donne $\dim(A') = \dim(A) - \dim(A \cap B) = \dim(B) - \dim(A \cap B) = \dim(B')$ puisque A et B ont la même dimension.

Par ailleurs, si $\dim(A') = 0$, alors $A' = \{0\}$ et donc $A \cap B = A = B$ ce qui est absurde par hypothèse à la fin de la question 2. Donc $p = \dim(A') \in \mathbb{N}^*$.

(c) A' et B' sont des sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Donc A' et B' sont des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Donc ils admettent des bases.

(d) $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, on pose $c_i = a_i + b_i$.

i. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_i = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} \lambda i c_i = 0 &\iff \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i = 0 && \text{par associativité et distributivité} \\ &\iff \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i \end{aligned}$$

Or $A' = \mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_p)$ et $B' = \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_p)$. Donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in A' \subset A$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i \in B' \subset B$. Donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in (A \cap B) \cap A' = \{0\}$. Donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i = 0$. Mais la famille $(a_1, \ldots, a_p)$ est libre. Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Et donc la famille $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_p)$ est libre.

ii. On pose $C = \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$. $\mathcal{C}$ est une famille libre. C'est donc une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre, par définition d'une base. Donc $\mathcal{C}$ est une base de C. Et donc $\dim C = p$.

iii. Soit $x \in A \cap C \subset C$. Alors $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i = u + v$ en posant $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$ et $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i$.

Alors $u \in A' \subset A$ et $v \in B'$. Donc $v = x - u \in A$ par stabilité par combinaison linéaire. Donc $v \in B' \cap A \subset A \cap B$. Mais $v \in B'$ donc $v \in B' \cap (A \cap B) = \{0\}$. On en déduit donc $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i = 0$. Mais la famille $(b_1, \ldots, b_p)$ est libre. Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ et par suite, $x = 0$. Donc $A \cap C = \{0\}$.

iv. On sait déjà que A et C sont en somme directe. Et ce sont tous deux des sev de $A + B$. Et on a

$$\begin{aligned} \dim(A) + \dim(C) &= \dim(A) + p && \text{cf 4.(d)ii.} \\ &= \dim(A) + \dim(A') && \text{par def } p \\ &= \dim(A) + (\dim(A) - \dim(A \cap B)) && \text{car } A = A' \oplus (A \cap B) \\ &= \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B) && \text{car } \dim A = \dim B \\ &= \dim(A + B) && \text{par Grassmann} \end{aligned}$$

Et la caractérisation des supplémentaires en dimension nous donne donc $A + B = A \oplus C$.

La symétrie du problème en A et C nous permet de montrer aussi que $B \cap C = \{0\}$ et $\dim(B) + \dim(C) = \dim(A + B)$. Ce qui termine l'étude.

Par conséquent, on vient de montrer que le problème a une solution si et seulement si A et B ont la même dimension.

Problème 2 (Suites implicites) :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose la fonction $f_n(x) = x + \ln(x) - n$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f_n'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Or $f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Par continuité de f_n, on a $f_n(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Donc $0 \in f_n(\mathbb{R}_+^*)$. Or f_n est continue, donc par TVI, $\exists x_n > 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

   De plus, f_n étant strictement croissante, elle est injective et l'injectivité nous fournit l'unicité de x_n. Donc $\exists! x_n > 0$, $f_n(x_n) = 0$.

   Enfin, $f_n(1) = 1 - n \leq 0$. Donc, par croissance de f_n, $1 \leq x_n$. Et $f_n(n) = \ln(n) \geq 0$, donc $x_n \leq n$ par croissance de f_n. D'où $x_n \in [1, n]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) = n + 1$. Et $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} + \ln(x_{n+1}) - n = n + 1 - n = 1 > 0$. Donc, par croissance de f_n, on en déduit $x_n < x_{n+1}$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

   Supposons que (x_n) est majorée. Alors, par théorème de la limite monotone, (x_n) serait convergente vers un réel ℓ. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geq 1$, par passage à la limite dans les inégalités, on a $\ell \geq 1$. Mais dans ce cas $\ln(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell) \geq 0$ par composition dans les limites.

   Par opérations sur les suites convergentes, on a donc $x_n + \ln(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ln(\ell)$. Donc $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ln(\ell) \in \mathbb{R}$. Et donc ☠ puisque $n \to +\infty$ et par unicité de la limite.

   On en déduit donc que (x_n) n'est pas majorée. Donc $\forall A > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $x_{n_0} > A$. Puis, par croissance de (x_n), $\forall A > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $x_n > x_{n_0} > A$. Donc, par définition, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n - \ln(x_n)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n}$.

   Mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq x_n \leq n$. Donc, par croissance de $\ln$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$. Or, par croissance comparée, $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc, par théorème des gendarmes, $\frac{\ln(x_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement, $\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   Et donc, par définition, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

4. On a $\frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = n + 1 - \ln(x_{n+1}) - n + \ln(x_n) = 1 - \ln(x_{n+1}/x_n)$. Mais $x_{n+1}/x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc $\ln(x_{n+1}/x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $x_{n+1} - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

5. Par définition de la suite (x_n), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n - n = -\ln(x_n)$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc, par composition des équivalents par $\ln$, on a donc $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Donc $x_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$. Et donc, par caractérisation des équivalents par les o, $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n))$.

   D'autre part, $x_n - n + \ln(n) = -\ln(x_n) + \ln(n) = -\ln(x_n/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ d'après 3. Donc $x_n - n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Et donc $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(1)$.

6. En reprenant la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n - n + \ln(n) = -\ln(x_n/n)$. Or $x_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc $\ln(x_n/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n/n - 1$.

   Mais $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(1)$. Donc $\frac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o(1/n)$. Et donc $\frac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{n} + o(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc finalement,

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o(1/n)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{n} + o(1/n) + o\left(-\frac{\ln(n)}{n} + o(1/n)\right) && \text{caractérisation } \sim \text{ par } o \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{n} + o(1/n) + o(\ln(n)/n) && \text{car } \frac{\ln(n)}{n} + o(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(n)}{n} + o(\ln(n)/n) && \text{car } 1/n \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n)/n)
\end{aligned}
$$

D'où

$$x_n = n - \ln(x_n) = n - \ln(n) - \ln(x_n/n) \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o(\ln(n)/n).$$