DM 2

Informatique

Listes au Père Noël

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Vendredi 03 Janvier 2025

Le Père Noël commence à se faire vieux. Voir toutes ces guirlandes de Noël clignoter et ce camaïeux de rouge et doré ont fini par avoir raison de sa rétine (aider par sa sénilité grandissante). Il est désormais atteint de trouble obsessionnel compulsif l'empêchant [1] de pouvoir livrer ses cadeaux aux maisons où au moins trois décorations identiques se suivent.

Pour simplifier les choses, nous allons nous intéresser seulement aux guirlandes de Noël ne contenant que deux motifs différents. On modélisera ces motifs par des 0 et des 1. Et une guirlande sera donc un tableau de 0 et de 1.

Par la suite, $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des tableaux de longueur n ne contenant que des 0 ou des 1. Par exemple $[0, 1, 1]$ est un élément de $\mathcal{L}_3$ et $[0, 0, 0, 0, 0]$ est un élément de $\mathcal{L}_5$.

1. (a) Combien existe-t-il d'élément de $\mathcal{L}_n$?
   (b) Créer une fonction `nombre2tableau(n : int, k : int) -> list`, qui renvoie un tableau de taille n contenant l'écriture binaire de k. Par exemple, `nombre2tableau(5,13)` renverra `[0,1,1,0,1]`.
   (c) En déduire une fonction `ensemble_tableaux(n : int) -> list`, qui renvoie un tableau de tous les tableaux de $\mathcal{L}_n$.
2. Créer une fonction `comptage(T : list) -> tuple`, qui prend en argument un tableau `T` et qui renvoie un tuple de deux éléments, dont le premier est le nombre de 0 du tableau `T` et le second le nombre de 1.
3. Écrire une fonction `plageMax0(T : list) -> int`, qui prend en argument un tableau `T` et qui renvoie la taille du plus grand sous-tableau de `T` ne contenant que des 0. Autrement dit, `plageMax0(T)` doit renvoyer le plus grands nombres de 0 consécutifs dans le tableau `T`.

   Par exemple, pour `T = [0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,0,0,1]`, la fonction devra renvoyer 3.
4. (a) Écrire une fonction `listeMin0(n : int) -> int`, qui renvoie le nombre de tableaux de $\mathcal{L}_n$ n'ayant jamais plus de 3 zéros consécutifs.
   (b) Écrire une fonction `listeMin(n : int) -> int`, qui renvoie le nombre de tableaux de $\mathcal{L}_n$ n'ayant jamais plus de trois valeurs identiques consécutives.
5. Les fabricants de décorations de Noël étant très sensibles à la détresse du Père Noël (et aussi à la perte de dividende que pourrait entraîner la mise au chômage technique si le Père Noël venait à flancher), ils décident alors de ne fabriquer plus que des guirlandes "acceptables" pour le Père Noël.

   Écrire une fonction `frise3(n : int) -> list`, qui renvoie le tableau de toutes les guirlandes de n motifs qui sont acceptables pour le Père Noël. Combien de guirlandes de taille 20 sont acceptables ?
6. Les chiffres 0 ou 1 utilisent un espace mémoire de 1 octet dans la table ASCII. Néanmoins en encodant les tableaux de 0 et 1 obtenus comme des nombres, chaque chiffre deviendrait un bit pour l'ordinateur.

   On souhaite traduire le tableau en son nombre binaire correspondant, ainsi `T = [0,0,1,0,1]` correspondrait à 5. Ce faisant, la longueur du tableau serait perdue. On décide donc de traduire un tableau par un tuple contenant sa longueur et le nombre binaire correspondant.

1. Les experts appellent ce trouble la *triskaphobie*

(a) Proposer une fonction `guirlande2tuple(T : list) -> tuple`, qui traduise le tableau `T` en un tuple contenant sa longueur et son nombre binaire. Par exemple, `guirlande2tuple([0,1,1,0,1])` renverra `(5,13)`.

(b) Proposer une fonction `frise3bis(n : int) -> list`, qui renvoie le tableau des tuples de toutes les guirlandes de n motifs acceptables par le Père Noël.

(c) Pour $n = 20$, quel est le plus petit nombre, ainsi que le plus grand, encodant une guirlande acceptable ?

(d) Proposer une amélioration afin de diminuer la place mémoire nécessaire pour stocker le tableau de tuples contenant les guirlandes acceptables par le Père Noël.