NOM :
Prénom :

Mardi 17 Décembre 2024

Interrogation 12

Applications Linéaires

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une application linéaire.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire si $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

2. Définition du rang d'une application.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit le rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, par $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

3. Théorème d'isomorphisme.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finie, $n = \dim(E) = \dim(F)$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f \in \mathrm{GL}(E, F \iff f$ injective $\iff f$ surjective $\iff \exists g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F \iff \exists h \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $h \circ f = \mathrm{Id}_E \iff \mathrm{rg}(f) = n$. De plus, dans ce cas $g = h = f^{-1}$.

4. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E)\dim(F)$.

5. Caractérisation des projecteurs.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur de E si, et seulement si, $p^2 = p$. Et dans ce cas, $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(p)$.

6. Théorème du rang.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

7. Caractérisation de l'inj/surj par le rang.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$. Et $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) \iff f$ injective et $\mathrm{rg}(f) = \dim(F) \iff f$ surjective.

Exercice 2 :
Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Soit $(x, y, z), (x", y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') && \text{def opé } \mathbb{R}^3 \\
&= ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z'), 2(\lambda x + x') + (\lambda y + y') - (\lambda z + z')) && \text{def } f \\
&= (\lambda(x + y + 2z) + (x' + y' + 2z'), \lambda(2x + y - z) + (2x' + y' - z')) && \text{anneau } (\mathbb{R}, +, \times) \\
&= \lambda(x + y + 2z, 2x + y - z) + (x' + y' + 2z', 2x' + y' - z') && \text{def opé } \mathbb{R}^2 \\
&= \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z') && \text{def } f
\end{aligned}$$

Donc, par définition de la linéarité, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{(x + 2y + z, 2x + y - z),\ x, y, z \in \mathbb{R}\} && \text{def } \mathrm{Im}(f) \\
&= \mathrm{Vect}((1,1), (2,1), (1,-1)) \\
&= \mathrm{Vect}((1,1), (1,-1)) && \text{élimination car } (2,1) = 3/2(1,1) + (1/2)(1,-1) \\
&= \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

car $(1,0) = 1/2(1,1) + 1/2(1,-1)$ et $(0,1) = 1/2(1,1) - 1/2(1,-1)$. Donc $\mathrm{rg}(f) = 2$. donc, par théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 3 - 2 = 1$.

Or $(2,1) = 3/2(1,1) + 1/2(1,-1) \iff f(0,1,0) = 3/2 f(1,0,0) + 1/2 f(0,0,1)$. Donc $(3,-2,2) \in \ker(f)$ par linéarité de f. Donc $\mathrm{Vect}((3,-2,-2)) \subset \ker(f)$. Et donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}((3,-2,2))$ car $\dim(\ker(f)) = 1$.