NOM :
Prénom :

Mardi 07 Janvier 2025

Interrogation 13

Limites, Continuité

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de la continuité en un point.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.s

2. Définition d'une limite finie en un point $a \in \mathbb{R}$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f converge vers ℓ en a (et on note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$), si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I$, $0 < |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \ell$.

3. Théorème des bornes atteintes.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, *i.e.* $\exists c, d \in [a,b]$, $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$.

4. Théorème de la limite monotone.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est monotone, alors f admet des limites (éventuellement infinies) aux bornes de I

5. Caractérisation séquentielle de la continuité.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Alors f est continue en a si, et seulement si, $\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

6. Continuité d'une composée sur un intervalle.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

7. Théorème de la bijection.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ strictement monotones. Alors f établie une bijection de I sur $f(I)$, $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone et de même monotonie que f.

8. Théorème des valeurs intermédiaires (pas le cas général).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a, b \in I$ tels que $f(a) \leq f(b)$. Si f est continue sur I, alors $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$.

Exercice 2 :
Montrer que $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et prolonger f.

$\arcsin \in \mathcal{C}^0([-1,1], [-\pi/2, \pi/2])$. Donc $f \in \mathcal{C}^0([-1,1] \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc en particulier $\arcsin$ est dérivable en 0 et $\arcsin'(0) = 1$. Donc, par définition de la dérivabilité,

$$f(x) = \frac{\arcsin(x) - \arcsin(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} \arcsin'(0) = 1.$$

Or $f \in \mathcal{C}^0([-1,1] \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
On pose

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\arcsin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Alors $\widetilde{f}$ est l'unique prolongement de f par continuité en 0 et donc $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$.