



# DM 4

## De la suite dans les idées

### Correction

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

Pour le Mardi 12 Novembre 2024

#### Problème 1 (Applications Linéaires) :

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f = \alpha \text{Id}_E$ . Alors  $f^2 = f \circ f = (\alpha \text{Id}_E) \circ (\alpha \text{Id}_E) = \alpha^2 \text{Id}_E \circ \text{Id}_E = \alpha^2 \text{Id}_E$  et  $f + \text{Id}_E = (\alpha + 1) \text{Id}_E$ . Donc  $\alpha^2 \text{Id}_E = \frac{\alpha+1}{2} \text{Id}_E$ . Ce qui implique bien sûr  $2\alpha^2 = \alpha + 1$  (puisque  $\mathcal{L}(E)$  est un ev, par exemple, ou en calculant sur un vecteur non nul si on préfère). On aboutit alors à  $\alpha \in \{1, -1/2\}$ .

Il est facile de vérifier que  $\text{Id}_E$  et  $-\frac{1}{2} \text{Id}_E$  sont bien des homothéties qui vérifient la relation.

2. Retour au cas général.

- (a) On a  $2f^2 = f + \text{Id}_E$ , donc  $f \circ (2f - \text{Id}_E) = \text{Id}_E$ . Or  $E$  est de dimension finie, donc, par théorème d'isomorphisme,  $f$  est un automorphisme de  $E$  et  $f^{-1} = 2f - \text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$  puisque  $\mathcal{L}(E)$  est un  $\mathbb{R}$ -ev (ou alors par que c'est l'inverse d'une application linéaire, ça fonctionne aussi).
- (b) Comme  $\mathcal{L}(E)$  est  $\mathbb{R}$ -ev, on sait que  $f - \text{Id}_E, f + \frac{1}{2} \text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ . Et les noyaux d'applications linéaire sont des sous-espaces vectoriels de l'espaces de départ (ce sont des pré-images du sev trivial de l'espace d'arrivée). Autrement dit,  $\ker(f - \text{Id}_E) = (f - \text{Id}_E)^{-1}(\{0\})$  et  $\{0\}$  est un sev de  $E$ , donc  $\ker(f - \text{Id}_E)$  est sev de  $E$ . De même pour  $\ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$ .
- (c) Soit  $x \in \ker(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$ . Alors  $f(x) = x$  et  $f(x) = -x/2$ . On a donc  $x = -x/2$ , ce qui entraîne immédiatement  $x = 0$ . Donc  $\ker(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f + 1/2 \text{Id}_E) \subset \{0\}$ . Or les noyaux sont des sev de  $E$ , donc  $\ker(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f + 1/2 \text{Id}_E) = \{0\}$ .

Soit  $x \in E$ . Alors  $x = \frac{2}{3} \left( f(x) + \frac{1}{2}x \right) - \frac{2}{3} (f(x) - x)$ . Et

$$\begin{aligned} f \left( f(x) + \frac{1}{2}x \right) &= f^2(x) + \frac{1}{2}f(x) \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f(x) \\ &= f(x) + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Donc  $f(x) + 1/2x \in \ker(f - \text{Id}_E)$ . Et

$$\begin{aligned} f(f(x) - x) &= f^2(x) - f(x) \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}x - f(x) \\ &= -\frac{1}{2}(f(x) - x) \end{aligned}$$

Donc  $f(x) - x \in \ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$ . On a donc

$$x = \frac{2}{3} \underbrace{\left(f(x) + \frac{1}{2}x\right)}_{\in \ker(f - \text{Id}_E)} - \frac{2}{3} \underbrace{(f(x) - x)}_{\in \ker(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E)}$$

Donc  $E = \ker(f - \text{Id}_E) + \ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$  puisque ce sont des sev de  $E$ , et donc  $E = \ker(f - \text{Id}_E) \oplus \ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$ .

(d) On a

$$\left(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right) \circ (f - \text{Id}_E) = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2} \text{Id}_E = 0$$

On a donc

$$\begin{aligned} \{0\} &= \left(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right) \circ (f - \text{Id}_E)(E) = \left(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right) ((f - \text{Id}_E)(E)) \\ &= \left(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right) (\text{Im}(f - \text{Id}_E)) \end{aligned}$$

Donc  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$ .

Mais par ailleurs, par théorème du rang, on sait que

$$\text{rg}(f - \text{Id}_E) = n - \dim(\ker(f - \text{Id}_E)) = \dim(\ker(f + 1/2 \text{Id}_E))$$

puisque  $\ker(f - \text{Id}_E)$  et  $\ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Donc  $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$  est un sev de  $\ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$  de même dimension que  $\ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$  et donc  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) = \ker(f + 1/2 \text{Id}_E)$ .

(e) On a toujours  $(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = 0 = (f - \text{Id}_E) \circ (f + \frac{1}{2} \text{Id}_E)$ . Donc  $\text{Im}(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E) \subset \ker(f - \text{Id}_E)$ . D'autre part, par la question précédente,  $\text{rg}(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E) = \dim(E) - \dim(\ker(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E)) = \dim(E) - \text{rg}(f - \text{Id}_E) = \dim(\ker(f - \text{Id}_E))$  par théorème du rang. Et donc  $\text{Im}(f + \frac{1}{2} \text{Id}_E) = \ker(f - \text{Id}_E)$ .

3. On suppose  $f$  et  $\text{Id}_E$  linéairement indépendants.

(a) On sait  $f^2 = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2} \text{Id}_E$ . Donc

$$\begin{aligned} f^3 &= f \circ f^2 \\ &= f \circ \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right) \\ &= \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right) + \frac{1}{2}f \\ &= \frac{3}{4}f + \frac{1}{4} \text{Id}_E \end{aligned}$$

Et en recomposant par  $f$ , on obtient

$$\begin{aligned} f^4 &= f \circ f^3 \\ &= f \circ \left(\frac{3}{4}f + \frac{1}{4} \text{Id}_E\right) \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2} \text{Id}_E\right) + \frac{1}{4}f \\ &= \frac{5}{8}f + \frac{3}{8} \text{Id}_E \end{aligned}$$

(b) On vient de montrer que  $\forall p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\exists (a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f^p = a_p f + b_p \text{Id}_E$ . Supposons que  $\exists p \in \mathbb{N}$  tel que  $\exists a_p, b_p \in \mathbb{R}$  tel que  $f^p = a_p f + b_p \text{Id}_E$ . Alors

$$f^{p+1} = f \circ f^p$$

$$\begin{aligned}
&= f \circ (a_p f + b_p \text{Id}_E) \\
&= a_p \left( \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} \text{Id}_E \right) + b_p f \\
&= \frac{a_p + 2b_p}{2} f + \frac{a_p}{2} \text{Id}_E
\end{aligned}$$

On pose alors  $a_{p+1} = \frac{a_p + 2b_p}{2} \in \mathbb{R}$  et  $b_{p+1} = \frac{a_p}{2} \in \mathbb{R}$ . Et donc  $f^{p+1} = a_{p+1}f + b_{p+1} \text{Id}_E$ .

Donc, par principe de récurrence,  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\exists a_p, b_p \in \mathbb{R}$  tels que  $f^p = a_p f + b_p \text{Id}_E$ .

(c) On a  $f^0 = \text{Id}_E = 0 \times f + 1 \times \text{Id}_E$  et  $f = 1 \times f + 0 \times \text{Id}_E$ . Donc  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b_0 = 1$  et  $b_1 = 0$ . Et on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{p+1} = \frac{a_p + 2b_p}{2} \quad \text{et} \quad b_{p+1} = \frac{a_p}{2}$$

d'après la question précédente.

(d) Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On a

$$a_{p+2} = \frac{a_{p+1} + 2b_{p+1}}{2} = \frac{a_{p+1} + a_p}{2}$$

Donc la suite  $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$  vérifie une relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique  $r^2 - r/2 - 1/2 = 0$ , de discriminant  $\Delta = 1/4 + 2 = 9/4 > 0$ , de racines réelles distinctes  $r_1 = -1/2$  et  $r_2 = 1$ . On en déduit donc  $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $a_p = \mu + \lambda \frac{(-1)^p}{2^p}$ . Or  $a_0 = 0$  et  $a_1 = 1$ , donc

$$\begin{cases} \mu + \lambda = 0 \\ \mu - \frac{\lambda}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3} \\ \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

On a donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{(-1)^p}{2^p} \right)$$

Et la relation  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $b_{p+1} = a_p/2$  avec  $b_0 = 1$  nous fournit alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, b_p = \begin{cases} \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{(-1)^p}{2^{p-1}} \right) & p \geq 1 \\ 1 & p = 0 \end{cases}$$

(On remarquera que les formules nous donnent bien les bons coefficients qu'on a obtenu par le calcul pour  $f^2$ ,  $f^3$  et  $f^4$ . Il est bon de vérifier rapidement : une erreur de calcul peut vite arriver).

La suite  $((-1)^p/2^p)$  est une suite géométrique de raison  $-1/2 \in ]-1, 1[$  donc convergente de limite nulle. Puis, comme l'espace des suites convergentes est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que les suites constantes sont convergentes, on en déduit que  $(a_p)$  et  $(b_p)$  sont convergentes. Par ailleurs, la limite est une forme linéaire sur l'espace des suites convergentes, donc elle est linéaire et donc

$$a_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}(1 - 0) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad b_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}(1 + 0) = \frac{1}{3}$$

(e) On pose  $q = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3} \text{Id}_E$ . Alors

$$\begin{aligned}
q^2 &= \left( \frac{2}{3}f + \frac{1}{3} \text{Id}_E \right) \circ \left( \frac{2}{3}f + \frac{1}{3} \text{Id}_E \right) \\
&= \frac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9} \text{Id}_E \\
&= \frac{4}{9} \left( \frac{1}{2}f + \frac{1}{2} \text{Id}_E \right) + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9} \text{Id}_E \\
&= \frac{2}{3}f + \frac{1}{3} \text{Id}_E \\
&= q
\end{aligned}$$

Et comme  $\mathcal{L}(E)$  est un  $\mathbb{R}$ -ev,  $q \in \mathcal{L}(E)$ . C'est donc un projecteur de  $E$ . C'est même le projecteur de  $E$  sur  $\text{Im}(q) = \ker(q - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\ker(q)$ .

Mais

$$\begin{aligned} x \in \ker(q) &\iff q(x) = 0 \\ &\iff \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = 0 \\ &\iff f(x) + \frac{1}{2}x = 0 \\ &\iff x \in \ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right) \end{aligned}$$

et donc  $\ker(q) = \ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)$ .

De même,

$$\begin{aligned} x \in \text{Im}(q) &\iff x \in \ker(q - \text{Id}_E) \\ &\iff q(x) = x \\ &\iff \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = x \\ &\iff f(x) + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x = 0 \\ &\iff f(x) - x = 0 \\ &\iff x \in \ker(f - \text{Id}_E) \end{aligned}$$

et donc  $\text{Im}(q) = \ker(f - \text{Id}_E)$ .

Finalement,  $q$  est la projection de  $E$  sur  $\ker(f - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\ker\left(f + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right)$ .

4. On pose  $\mathcal{M} = \{\lambda f + \mu \text{Id}_E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ .

(a) On a donc  $\mathcal{M} = \text{Vect}(f, \text{Id}_E) \subset \mathcal{L}(E)$ . C'est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

Soit  $g, h \in \mathcal{M}$ . Donc  $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que  $g = af + b\text{Id}_E$  et  $h = cf + d\text{Id}_E$ . Alors

$$\begin{aligned} g \circ h &= (af + b\text{Id}_E) \circ (cf + d\text{Id}_E) \\ &= acf^2 + (ad + bc)f + bd\text{Id}_E \\ &= (ad + bc + ac/2)f + (bd + ac/2)\text{Id}_E \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned} h \circ g &= (cf + d\text{Id}_E) \circ (af + b\text{Id}_E) \\ &= caf^2 + (da + cb)f + db\text{Id}_E \\ &= (ca/2 + da + cb)f + (db + ca/2)\text{Id}_E \\ &= g \circ h \end{aligned}$$

puisque le produit est commutatif dans  $\mathbb{R}$  et l'addition aussi.

(b) On a vu  $\mathcal{M} = \text{Vect}(f, \text{Id}_E)$ . Donc  $\dim(\mathcal{M}) \leq 2$ . Par ailleurs,  $\text{Id}_E \neq 0$ , donc  $\dim(\mathcal{M}) \geq 1$ .

Mais par hypothèse, on a supposé que  $f$  et  $\text{Id}_E$  sont linéairement indépendants, donc la famille  $(f, \text{Id}_E)$  est une famille libre. Elle est donc libre et génératrice de  $\mathcal{M}$ , c'est donc une base de  $\mathcal{M}$  et donc  $\mathcal{M}$  est de dimension 2.

Dans le cas de la première question où  $f$  est une homothétie,  $f$  est donc proportionnelle à  $\text{Id}_E$  et donc la famille  $(f, \text{Id}_E)$  est liée. Ce qui entraîne que  $\dim \mathcal{M} = 1$  (et donc  $\mathcal{M} = \text{Vect}(\text{Id}_E)$ ).

**Problème 2 (BONUX (Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ )) :**

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $n = \dim(E)$ ,  $p = \dim(F)$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  une base de  $F$ .

1. Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^* = 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^* &= 0 \\ \iff \forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^*(e_j) &= 0 \\ \iff \forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{k,j} &= 0 \\ \iff \forall j \in \{1, \dots, n\}, \lambda_j &= 0. \end{aligned}$$

Donc, par définition, la famille  $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  est libre.

On ne peut pas utiliser la dimension de  $E^*$  pour conclure. Ça reviendrait à utiliser la dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ , qui est précisément ce qu'on veut trouver. On est donc contraint de montrer que  $\mathcal{B}^*$  est aussi une famille génératrice de  $E^*$ .

Soit  $f \in E^*$ . On pose  $g = \sum_{k=1}^n f(e_k) e_k^* \in E^*$ . Alors

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, g(e_j) = \sum_{k=1}^n f(e_k) e_k^*(e_j) = f(e_j).$$

Donc  $f(\mathcal{B}) = g(\mathcal{B})$ . Or, en dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc  $f = g$ . Et donc  $f \in \text{Vect}(\mathcal{B}^*)$ . Donc  $E^* \subset \text{Vect}(\mathcal{B}^*)$ . Or  $\text{Vect}(\mathcal{B}^*) \subset E^*$ , donc  $E^* = \text{Vect}(\mathcal{B}^*)$ .

Finalement,  $\mathcal{B}^*$  est une famille libre et génératrice de  $E^*$ . Donc  $\mathcal{B}^*$  est une base de  $E^*$  (et donc aussi  $\dim(E^*) = n$ ).

2. Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$ . Alors  $\forall x \in E$ ,  $e_i^*(x) \in \mathbb{K}$ . Donc  $\forall x \in E$ ,  $e_i^*(x) \varepsilon_j$  est bien définie. On peut donc définir une application

$$e_i^* \varepsilon_j : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & e_i^*(x) \varepsilon_j \end{array}$$

De plus, comme  $e_i^*$  est linéaire et que le LCE de  $E$  est bilinéaire, on en déduit que  $e_i^* \varepsilon_j$  est linéaire. Donc  $e_i^* \varepsilon_j \in \mathcal{L}(E, F)$ .

3. Soit  $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  des scalaires tels que  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} e_i^* \varepsilon_j = 0$ . En particulier, on en déduit

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, \dots, n\}, \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} e_i^*(e_k) \varepsilon_j &= 0 \\ \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^p a_{k,j} \varepsilon_j &= 0 \\ \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, a_{k,1} = \dots = a_{k,p} &= 0 && \text{car } \mathcal{C} \text{ libre} \\ \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}, a_{k,j} &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $(e_i^* \varepsilon_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  est libre.

- 
4. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f(e_i) \in F$ . Or  $\mathcal{C}$  est une base de  $F$ . Donc  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\exists a_{i,1}, \dots, a_{i,p} \in \mathbb{K}$  tels que  $f(e_i) = \sum_{j=1}^p a_{i,j} \varepsilon_j$ . On pose alors  $g = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} e_i^* \varepsilon_j$ .

Alors

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, \dots, n\}, g(e_k) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} e_i^*(e_k) \varepsilon_j \\ &= \sum_{j=1}^p a_{k,j} \varepsilon_j \\ &= f(e_k). \end{aligned}$$

Donc  $g(\mathcal{B}) = f(\mathcal{B})$ . Or une application linéaire, en dimension finie, est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc  $f = g$ . Et donc  $(e_i^* \varepsilon_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  engendre  $\mathcal{L}(E, F)$ .

5. D'après les deux dernières questions, on vient donc de montrer que  $(e_i^* \varepsilon_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  est une base de  $\mathcal{L}(E, F)$ . D'où, par définition de la dimension,

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np = \dim(E) \dim(F).$$