Lycée Loges

Chapitre 14 - TD

Arithmétique

Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

7 janvier 2025

1 Divisibilité

1.1 Divisibilité

Exercice	Indications
1	Au pire, on peut le faire par récurrence, mais ce serait quasiment pas utilisé le cours. On peut tout démontrer directement.
2	1 divise n. Mais $1 = 2 - 1$ et 2 est premier. Donc ... ? Mais $3 = 2 - 1$ et 3 est premier. Donc ... ? Mais 2 et 3 sont premiers entre eux. Donc ... ?
3	Commencer par écrire la définition de P. On rappelle que si $d\|n$, alors $\frac{n}{d}\|n$ aussi. On peut donc écrire P différemment. Ça devrait donner des idées.
4	À partir des manipulations sur les diviseurs, montrer que dans chaque question, le diviseurs divise une constante. Puis terminer par une disjonction de cas.
5	Pour 1, 2, 3, on a des techniques données dans le cours. Pour 4, 5, 6 : factoriser l'expression pour pouvoir utiliser l'arithmétique.

1.2 Division euclidienne

Exercice	Indications
6	Utiliser la définition de la division euclidienne.
7	Reprendre la démo pour les divisions euclidiennes et l'adapter (en particulier, faire une récurrence forte). Pour l'unicité, prendre deux écritures distinctes et considérer l'indice le plus grand pour lequel les coefficients diffèrent.

1.3 Congruences

Exercice	Indications
8	Faire une disjonction de cas selon les restes dans la division euclidienne par 10
9	Congruences

10	Écrire la définition d'un entier impair, passer au carré et utiliser l'arithmétique.
11	Il y a plusieurs façons de faire. On peut commencer par regarder la table des restes modulo 10 des puissances de 3 et des puissances de 7. Ça peut donner des idées.
12	Il faut faire un raisonnement par l'absurde. Et réduire ensuite le problème modulo un entier judicieusement choisi (et suggéré par l'analyse de la situation).

2 PGCD et PPCM

Exercice	Indications
13	L'algorithme est efficace. On peut faire mieux, parfois, mais il faut être plus malin.
14	Le premier est assez facile. Pour le reste, c'est du cours et des équations diophantienne.
15	Le pgcd est un diviseur des deux. Mais les diviseurs de comportent bien par certaines manipulations. Et hop.
16	Reprendre les définitions des congruences. Avec les hypothèses, ça tombe tout seul.
17	Utiliser le faire que la divisibilité est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$.
18	1 Dans un système, les deux équations doivent vérifier en même temps. Mais avec le pgcd et le ppcm, on peut avoir une nouvelle informations supplémentaires. On peut faire une disjonction de cas et éliminer quelques possibilités ensuite. 2 Se ramener à des entiers premiers entre eux.
19	Trouver une condition nécessaire est facile : il y a un rapport arithmétique entre d et m. Il reste à montrer que cette condition est aussi suffisante.
20	1 On a des factorisations classiques qui répondent au problème. 2 Adapter l'algorithme d'Euclide dans ce cas.
21	Utiliser le fait que $\mid$ est une relation d'ordre. Même chose pour le ppcm, mais cette fois, la relation n'est pas donnée. Il suffit d'adapter le raisonnement précédent.
22	L'unicité n'a pas vraiment besoin d'être traité à part. Elle est automatique dans l'existence. Mais pour l'existence, c'est la preuve du pudding, il faut avoir une idée des entiers d_1 et d_2 à choisir. Et pour ça, l'étude de l'unicité peut donner des pistes.
23	Faire une disjonction de cas sur les différentes valeurs que peut prendre $\mathrm{pgcd}(x, y)$.
24	C'est un raisonnement classique. On commence par se ramener à des entiers premiers entre eux en utilisant le pgcd. Puis, il manque un petit lemme qu'il suffit de démontrer pour terminer l'exercice.
25	L'injectivité est le plus facile. Utiliser Bézout pour la surjectivité.

3 Les nombres premiers

3.1 Primalité

Exercice	Indications
26	1 Vous devriez reconnaître les coefficients. Sinon, regarder les biens. Ils y a comme une géométrie. Factoriser l'expression ensuite. 2 Factoriser comme on peut. Il est possible de factoriser complètement l'expression. Mais ce n'est pas nécessaire. On peut s'en sortir avec une "petit" factorisation.
27	Comme d'habitude, le problème, c'est la traduction mathématique. En écrivant les choses clairement en maths, c'est évident. Attention aux quantificateurs.

28	Montrer qu'on peut trouver un premier pas trop gros comme il faut. Puis, par l'absurde, montrer qu'il est pas trop petit.
29	1 Absurde avec une factorisation classique 2 Reprendre les idées de la question précédente avec des factorisations. 3 Considérer la plus grande puissance de 2 qui divise n. Puis factoriser.

3.2 Valuations p-adiques, Fermat etc.

30	On est dans quelle partie ? Il n'y aurait pas un lien avec la divisibilité ?
31	Il faut démontrer P ou Q. Mais ça, on sait faire. Attention à partir du bon point de départ : celui qui donne le plus d'informations pour travailler.
33	1 Bézout, c'est bien. 2 Le petit théorème de Fermat.
34	C'est assez direct en utilisant les congruences.
35	Il faut utiliser des congruences un peu partout.