DS 5
Applications Linéaires

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 08 Janvier 2025

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 2 pages.

Problème 1 (Algèbre : Autour des pseudo-inverses (Tiré de Aggro-Veto A 2016)) :
Le but de ce problème est de généraliser la notion d'inverse d'un endomorphisme en dimension finie.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul fixé.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. f est dite pseudo-inversible si

$$\exists g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \begin{cases} f \circ g = g \circ f \\ f \circ g \circ f = f \\ g \circ f \circ g = g \end{cases} \tag{1}$$

On dit alors que g est une pseudo-inverse de f.

Partie A : Un exemple

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+3z, 2x-2y+2z, x-y+z) \end{array}$$

A.1 Montrer que f est linéaire.

A.2 Déterminer une base de $\ker(f)$, de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

A.3 Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

A.4 Calculer f^2.

A.5 Déterminer $\mathrm{rg}(f^2)$.

A.6 On pose $g : (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x-y+3z}{2}, x-y+z, \frac{x-y+z}{2}\right)$.

(a) Montrer que g est linéaire.

(b) Montrer que g est le pseudo-inverse de f.

Partie B : Premières propriétés

B.1 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ pseudo-inversible. Soit $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ deux pseudo-inverses de f. Montrer que $f \circ g_1 = f \circ g_2$ et en déduire que $g_1 = g_2$.

Ainsi, un endomorphisme pseudo-inversible admet un unique pseudo-inverse, appelé le pseudo-inverse de f et notée f^*.

B.2 Quelques exemples.

(a) Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ inversible est pseudo-inversible et déterminer son pseudo-inverse.

(b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f^2 = f$. Montrer que f est pseudo-inversible et déterminer son pseudo-inverse.

(c) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ pseudo-inversible. On suppose que u est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 2$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

i. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, $u^* \circ u^k = u^{k-1}$.

ii. Aboutir à une contradiction et conclure.

B.3 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose f pseudo-inversible.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^*)$.

(b) Montrer que $\ker(f) = \ker(f^*)$.

(c) Calculer $(f \circ f^*)^2$. Que peut-on en déduire pour $f \circ f^*$?

Partie C : Une caractérisation en dimension finie

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Le but de cette partie est de montrer

$$f \text{ pseudo-inversible} \iff \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2).$$

C.1 On suppose que f est pseudo-inversible et on introduit f^* le pseudo-inverse de f.

(a) Montrer que $f^* \circ f^2 = f$ et que $f^2 \circ f^* = f$.

(b) Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

(c) Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(d) Montrer également que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

C.2 Dans cette question, on suppose $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

(b) Justifier que $\ker(f) = \ker(f^2)$.

(c) i. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x - f(y) \in \ker(f)$.

ii. En déduire que $\mathbb{R}^n = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$.

iii. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

iv. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $y \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $x - f(y) \in \ker(f)$.

v. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer alors l'unicité de $y \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $x - f(y) \in \ker(f)$.

(d) On définit l'application $f_0 : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ par $f_0(x) = f(x)$.

i. Montrer que f_0 est un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$.

ii. On définit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $g(x) = (f_0)^{-1}(x_2)$ où (x_1, x_2) est l'unique couple de $\ker(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Montrer que g est linéaire.

iii. Montrer que g est le pseudo-inverse de f.