DS 5
Applications Linéaires
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 08 Janvier 2025

Problème 1 (Algèbre : Autour des pseudo-inverses) :

Partie A : Un exemple

Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+3z, 2x-2y+2z, x-y+z) \end{array}.$$

A.1 Soit $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
& f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')) \\
=& f(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z') && \text{def opé } \mathbb{R}^3 \\
=& \Big((\lambda x+x')-(\lambda y+y')+3(\lambda z+z'), 2(\lambda x+x')-2(\lambda y+y')+2(\lambda z+z'), (\lambda x+x')-(\lambda y+y')+(\lambda z+z')\Big) && \text{def } f \\
=& \Big(\lambda(x-y+3z)+(x'-y'+3z'), \lambda(2x-2y+2z)+(2x'-2y'+2z'), \lambda(x-y+z)+(x'-y'+z')\Big) && \mathbb{R} \text{ ann comm} \\
=& \lambda(x-y+3z, 2x-2y+2z, x-y+z)+(x'-y'+3z', 2x'-2y'+2z', x'-y'+z') && \text{def opé } \mathbb{R}^3 \\
=& \lambda f(x,y,z)+f(x',y',z')
\end{aligned}$$

Donc, par définition, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

A.2 Il est facile de voir que $f(1,1,0)=0$. Donc $\mathrm{Vect}(1,1,0) \subset \ker(f)$ par linéarité de f. Donc $\dim(\ker(f)) \geq 1$. Et donc, par théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) \leq 2$. Or $f(1,0,0) = (1,2,1)$ et $f(0,0,1) = (3,2,1)$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lambda(1,2,1)+\mu(3,2,1)=0 &\iff (\lambda+3\mu, 2\lambda+2\mu, \lambda+\mu) = 0 && \text{def opé } \mathbb{R}^3 \\
&\iff \begin{cases} \lambda+3\mu=0 \\ \lambda+\mu=0 \end{cases} && \text{liberté base canonique } \mathbb{R}^3 \\
&\iff \begin{cases} 2\mu=0 \\ \lambda+\mu=0 \end{cases} && L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\iff \lambda=\mu=0
\end{aligned}$$

Donc la famille $((1,2,1),(3,2,1))$ est libre. Donc $\mathrm{rg}(f) \geq 2$. Donc $\mathrm{rg}(f) = 2$. Et donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $((1,2,1),(3,2,1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

De plus, par théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 3 - \mathrm{rg}(f) = 1$. Or $(1,1,0) \in \ker(f)$ et $(1,1,0) \neq 0$. Donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0))$ et $((1,1,0))$ est une base de $\ker(f)$.

A.3 Soit $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lambda(1,2,1)+\mu(3,2,1)+\gamma(1,1,0)=0 &\iff (\lambda+3\mu+\gamma, 2\lambda+2\mu+\gamma, \lambda+\mu)=0 && \text{opé } \mathbb{R}^3\\
&\iff \begin{cases}\lambda+3\mu+\gamma=0\\ 2\lambda+2\mu+\gamma=0\\ \lambda+\mu=0\end{cases} && \text{liberté base canonique } \mathbb{R}^3\\
&\iff \begin{cases}2\mu+\gamma=0\\ \gamma=0\\ \lambda+\mu=0\end{cases} && \begin{matrix}L_1\leftarrow L_1-L_3\\ L_2\leftarrow L_2-2L_3\end{matrix}\\
&\iff \lambda=\mu=\gamma=0
\end{aligned}$$

Donc la famille $((1,2,1),(3,2,1),(1,1,0))$ est libre. Donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $((1,2,1),(3,2,1),(1$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc

$$\mathbb{R}^3=\mathrm{Vect}((1,2,1),(3,2,1),(1,1,0))=\mathrm{Vect}((1,2,1),(3,2,1))\oplus\mathrm{Vect}((1,1,0))=\mathrm{Im}(f)\oplus\ker(f).$$

Donc $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

A.4 Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
f^2(x,y,z) &= f(x-y+3z, 2x-2y+2z, x-y+z) && \text{def } f\\
&= \Big((x-y+3z)-(2x-2y+2z)+3(x-y+z),\\
&\qquad 2(x-y+3z)-2(2x-2y+2z)+2(x-y+z), && \text{def } f\\
&\qquad (x-y+3z)-(2x-2y+2z)+(x-y+z)\Big)\\
&= (2x-2y+4z, 4z, 2z)
\end{aligned}$$

Donc

$$f^2 : \begin{matrix}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-2y+4z,4z,2z)\end{matrix}$$

A.5 On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f^2) &= \mathrm{Vect}(f^2(1,0,0), f^2(0,1,0), f^2(0,0,1))\\
&= \mathrm{Vect}((2,0,0),(-2,0,0),(4,4,2))\\
&= \mathrm{Vect}((1,0,0),(1,1,2)) && \text{substitution et élimination}
\end{aligned}$$

Or il est assez clair que $((1,0,0),(1,1,2))$ est libre (système facile à résoudre). Donc $((1,0,0),(1,1,2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f^2)$. Et donc, par définition de la dimension, $\mathrm{rg}(f^2)=2=\mathrm{rg}(f)$.

A.6 On pose $g : (x,y,z)\mapsto\left(\frac{x-y+3z}{2}, x-y+z, \frac{x-y+z}{2}\right)$.

(a) Alors $g=\frac{1}{2}f$. Or $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est un $\mathbb{R}$-ev. Donc $g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

(b) On commence par calculer f^3 : Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
f^3(x,y,z) &= f(2x-2y+4z,4z,2z)\\
&= ((2x-2y+4z)-4z+6z, 2(2x-2y+4z)-8z+4z, (2x-2y+4z)-4z+2z) && \text{def } f\\
&= (2x-2y+3z, 4x-4y+4z, 2x-2y+2z)\\
&= 2f(x,y,z)
\end{aligned}$$

Donc $f\circ g\circ f=\frac{1}{2}f^3=f$. Et $g\circ f\circ g=\frac{1}{4}f^3=\frac{1}{2}f=g$. Et enfin $g\circ f=\frac{1}{2}f^2=f\circ g$, par linéarité à droite et à gauche de la composition.

Donc, par définition, g est le pseudo-inverse de f.

Partie B : Définition, premières propriétés

B.1 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ pseudo-inversible. Soit $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ deux pseudo-inverses de f. Alors

$$\begin{aligned}
f \circ g_1 &= (f \circ g_2 \circ f) \circ g_1 && g_2 \text{ pseudo-inverse de } f \\
&= (f \circ g_2) \circ (f \circ g_1) && \text{associativité} \\
&= (g_2 \circ f) \circ (g_1 \circ f) && \text{commutativité des pseudo-inverses} \\
&= g_2 \circ (f \circ g_1 \circ f) && \text{associativité} \\
&= g_2 \circ f && \text{pseudo-inverse} \\
&= f \circ g_2 && \text{commutativité des pseudo-inverses}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
g_1 &= g_1 \circ f \circ g_1 && \text{pseudo-inverse} \\
&= g_1 \circ (f \circ g_1) && \text{associativité} \\
&= g_1 \circ (f \circ g_2) && \text{car } f \circ g_1 = f \circ g_2 \\
&= (g_1 \circ f) \circ g_2 && \text{associativité} \\
&= (g_1) \circ g_2 && \text{commutativité pseudo-inverses} \\
&= (f \circ g_2) \circ g_2 && \text{car } f \circ g_1 = f \circ g_2 \\
&= (g_2 \circ f) \circ g_2 && \text{commutativité pseudo-inverses} \\
&= g_2.
\end{aligned}$$

D'où l'unicité du pseudo-inverse, s'il existe.

B.2 Quelques exemples.

(a) Soit $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Alors, par définition de l'inverse, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = f^{-1} \circ f$. Et $f^{-1} \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \circ f^{-1} = f^{-1}$ et $f \circ f^{-1} \circ f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = f$. Donc f est pseudo-inversible et $f^* = f^{-1}$.

(b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f^2 = f$. Alors $f^3 = f \circ f^2 = f^2 = f$. Donc f est pseudo-inversible et $f^* = f$.

(c) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ pseudo-inversible et nilpotent.

i. On a :

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 2,\ u^* \circ u^k &= (u^* \circ u) \circ u^{k-1} && \text{associativité} \\
&= (u \circ u^*) \circ u^{k-1} && \text{comm pseudo-inverse} \\
&= (u \circ u^* \circ u) \circ u^{k-2} && \text{associativité} \\
&= u^{k-1} && \text{pseudo-inverse}
\end{aligned}$$

ii. Soit p l'indice de nilpotence de u. Donc $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Alors $0 = u^* \circ u^p = u^{p-1} \neq 0$. Donc ☠. Donc un endomorphisme nilpotent n'est pas pseudo-inversible.

B.3 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose f pseudo-inversible.

(a) On a donc $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^* \circ f \circ f^* = f^*$ et $f \circ f^* \circ f = f$. Par commutativité, on en déduit donc aussi $f^* \circ f^2 = f$. D'où $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^* \circ f^2) \subset \mathrm{Im}(f^*)$.

De même, la commutativité nous fournit $f \circ (f^*)^2 = f^*$ et donc $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Im}(f \circ (f^*)^2) \subset \mathrm{Im}()$.

D'où l'on déduit $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^*)$.

(b) D'après la question précédente et le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f)) = n - \mathrm{rg}(f) = n - \mathrm{rg}(f^*) = \dim(\ker(f^*))$.

Et aussi $\ker(f^*) \subset \ker(f^2 \circ f^*) = \ker(f \circ f^* \circ f) = \ker(f)$ par commutativité et pseudo-inversibilité.

D'où $\ker(f) = \ker(f^*)$.

(c) Enfin,

$$(f \circ f^*)^2 = f \circ f^* \circ f \circ f^* \qquad \text{def}$$

$$
\begin{aligned}
&= (f \circ f^* \circ f) \circ f^* && \text{associativité} \\
&= f \circ f^*
\end{aligned}
$$

Donc $f \circ f^*$ est un projecteur, par caractérisation des projecteurs.

Partie C : Une caractérisation en dimension finie

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

C.1 On suppose f pseudo-inversible.

(a) En particulier, f et f^* commutent. Donc

$$
\begin{aligned}
f &= f \circ f^* \circ f & f &= f \circ f^* \circ f \\
&= (f \circ f^*) \circ f & &= f \circ (f^* \circ f) && \text{associativité} \\
&= (f^* \circ f) \circ f & &= f \circ (f \circ f^*) && \text{commutativité} \\
&= f^* \circ f^2 & &= f^2 \circ f^*
\end{aligned}
$$

(b) Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(y)$ (par définition de $\mathrm{Im}(f)$). Donc $0 = f(x) = f^2(y)$. En composant par f^*, on a alors $0 = f^*(0) = f^* \circ f^2(y) = f(y) = x$. D'où $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$.

Mais $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sev de $\mathbb{R}^n$. Donc $0 \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, donc $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

(c) D'après la question précédente, on a $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Or, par théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. Donc, par caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, *i.e.* $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(d) On a $f = f^2 \circ f^*$. Donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2 \circ f^*) \leq \mathrm{rg}(f^2)$. Et aussi $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$. D'où, par antisymétrie de la relation d'ordre, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

C.2 On suppose $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

(a) On a $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ (car $\mathrm{Im}(f^2) = f^2(\mathbb{R}^n) = f(f(\mathbb{R}^n)) \subset f(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Im}(f)$). Or $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f^2))$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

(b) Si $x \in \ker(f)$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Donc $x \in \ker(f)$. Donc $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. D'autre part, par théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = n - \mathrm{rg}(f) = n - \mathrm{rg}(f^2) = \dim(\ker(f^2))$. Donc $\ker(f) = \ker(f^2)$.

(c) i. On a $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Or $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ d'après C.2a. Donc $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = f^2(y)$. Par linéarité, on en déduit $f(x - f(y)) = 0$. Donc, par définition, $x - f(y) \in \ker(f)$. Donc $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x - f(y) \in \ker(f)$.

ii. On pose $z = x - f(y) \in \ker(f)$. Alors $x = f(y) + z$ et $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$ par définition et $z \in \ker(f)$ d'après la question précédente. Donc, par définition, $x \in \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$. D'où $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$.

Mais $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sevs de $\mathbb{R}^n$, donc $\mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ et donc $\mathrm{Im}(f) + \ker(f) \subset \mathbb{R}^n$.

D'où $\mathbb{R}^n = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$.

iii. D'après la question précédente, $\mathbb{R}^n = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$. Mais par théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^n)$, donc, par caractérisation des supplémentaires en dimension fini, $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ et donc $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

iv. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. D'après la question C.2(c)i, $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x - f(y) \in \ker(f)$. Mais d'après la question précédente, $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Donc $\exists (y_0, y_1) \in \ker(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $y = y_0 + y_1$. Alors $f(y) = f(y_0) + f(y_1) = f(y_1)$, par linéarité. Donc $x - f(y) = x - f(y_1) \in \ker(f)$.

D'où $\exists y_1 \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $x - f(y_1) \in \ker(f)$.

v. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Supposons $\exists y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $x - f(y_1) \in \ker(f)$ et $x - f(y_2) \in \ker(f)$. Alors, par structure d'ev de $\ker(f)$, $f(y_1) - f(y_2) = (x - f(y_2)) - (x - f(y_1)) \in \ker(f)$. Par linéarité, on en déduit $f(y_1 - y_2) \in \ker(f)$. Donc $f^2(y_1 - y_2) = 0$. Donc $y_1 - y_2 \in \ker(f^2)$.

Or $\ker(f^2) = \ker(f)$ d'après C.2b. Donc $y_1 - y_2 \in \ker(f)$. Mais, par définition, $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Donc, par structure d'ev de $\mathrm{Im}(f)$, on a $y_1 - y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Finalement, $y_1 - y_2 \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Mais, d'après C.2(c)iii, $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Donc $y_1 = y_2$. D'où l'unicité.

(d) On définit $f_0 : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ par $f_0(x) = f(x)$.

i. On notera que f_0 est bien définie car $\forall x \in \mathrm{Im}(f)$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$.

Par ailleurs, f_0 hérite de la linéarité de f : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + y \in \mathrm{Im}(f)$ car $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ et $f_0(\lambda x+y) = f(\lambda x+y) = \lambda f(x)+f(y) = \lambda f_0(x)+f_0(y)$ par définition de f_0. Donc f_0 est linéaire. Donc $f_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(f))$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $f_0(x) = 0$. Alors, par définition de f_0, $f(x) = 0$. Donc $x \in \ker(f)$. Mais par définition, $x \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ par C.2(c)iii. Donc $x = 0$. Et donc $\ker(f_0) \subset \{0\}$. Mais comme f_0 est linéaire, on a aussi $0 \in \ker(f_0)$ et donc $\ker(f_0) = \{0\}$.

Finalement, par théorème de l'isomorphisme (car $\mathrm{Im}(f)$ est un ev de dimension finie en tant que sev d'un ev de dimension finie), $f_0 \in \mathrm{GL}(\mathrm{Im}(f))$.

ii. On définit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $g(x) = (f_0)^{-1}(x_2)$ où $(x_1, x_2) \in \ker(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$ (cf C.2(c)iii).

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \ker(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Alors $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$ avec $\lambda x_1 + y_1 \in \ker(f)$ et $\lambda x_2 + y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $(\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2)$ est la décomposition de $\lambda x + y$ dans $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, qui est unique.

Donc, par définition de g, $g(\lambda x+y) = (f_0)^{-1}(\lambda x_2+y_2) = \lambda(f_0)^{-1}(x_2)+(f_0)^{-1}(y_2)$ car f_0 est linéaire et bijective, donc $(f_0)^{-1}$ est aussi linéaire. D'où $g(\lambda x + y) = \lambda g(x) + g(y)$. Donc g est linéaire.

iii. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $(x_1, x_2) \in \ker(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Alors

$$\begin{aligned}
f \circ g(x) &= f \circ (f_0)^{-1}(x_2) \\
&= f_0 \circ (f_0)^{-1}(x_2) && \text{par def } f_0 \text{ et } (f_0)^{-1}(x_2) \in \mathrm{Im}(f) \\
&= x_2.
\end{aligned}$$

De plus, on a $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc la décomposition de $f(x_2)$ dans la somme directe $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est $(0, f(x_2))$. Donc

$$\begin{aligned}
g \circ f(x) &= g(f(x_2)) && \text{linéarité de } f \text{ et def } x_1 \\
&= (f_0)^{-1}(f_0(x_2)) && \text{car } x_2 \in \mathrm{Im}(f) \\
&= x_2.
\end{aligned}$$

Donc $f \circ g = g \circ f$. Donc f et g commutent.

De plus,

$$\begin{aligned}
f \circ g \circ f(x) &= f(g \circ f(x)) && \text{associativité} \\
&= f(x_2) && \text{cf calcul précédent} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g \circ f \circ g(x) &= g(f \circ g(x)) && \text{associativité} \\
&= g(x_2) \\
&= g(x) && \text{par def } g
\end{aligned}$$

Donc $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

D'où g est le pseudo-inverse de f.