NOM :
Prénom :

Mardi 21 Janvier 2025

Interrogation 15

Arithmétique

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Théorème de Bézout.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors $\exists u, v \in \mathbb{Z},\ au+bv = 1 \iff a \wedge b = 1$.

2. Lemme d'Euclide.

Soit $p \in \mathbb{N}$ premier et $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$.

3. Lemme de Gauss.

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tel que $a \wedge b = 1$. Si $a|bc$, alors $a|c$.

4. Définition d'un nombre premier.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $p \geq 2$, alors p est dit un nombre premier si $\mathrm{Div}_+(p) = \{1, p\}$.

5. Lien entre PGCD et PPCM.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a \wedge b = 1$, alors $a \vee b = |ab|$. Et sinon, $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

6. Division euclidienne.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Alors $\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq+r$ et $0 \leq r < b$.

7. Caractérisation du PGCD par des entiers premiers entre eux.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$. Alors $d = a \wedge b \iff \exists a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a' \wedge b' = 1$ et $a = da'$, $b = db'$.

8. Définition de la valuation p-adique.

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ premier. On appelle valuation p-adique de a, noté $v_p(a)$, la plus grande puissance de p qui divise a, *i.e.* $v_p(a) = \max\{n \in \mathbb{N},\ p^n|a\}$.

Exercice 2 :
Résoudre l'équation $3x + 7y = 9$.

Tout d'abord, on note que $3 \times 2 + 7 \times 0 = 9$. Donc le couple $(3, 0)$ est une solution.

Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $3x + 7y = 9$. Donc $3(3 - x) = 7y$. Donc $7|3(3 - x)$. Or $3 \wedge 7 = 1$ (car 3 et 7 sont premiers distincts). Donc, par lemme de Gauss, $7|(3 - x)$. Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $3 - x = 7k$. Et donc alors $3 \times 7k = 7y$. Donc $y = 3k$ car $\mathbb{Z}$ est intègre.

Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x, y) = (3 - 7k, 3k)$.

Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$, alors $3(3 - 7k) + 7 \times 3k = 9$. D'où :

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ 3x + 7y = 9\} = \{(3 - 7k, 3k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$