NOM :
Prénom :

Mardi 14 Janvier 2025

Lycée Loges

Interrogation 14

Dérivabilité

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de la dérivabilité.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'(a)$ la valeur de cette limite et $f'(a)$ est le nombre dérivée de f en a.

2. Définition d'une fonction lipschitzienne.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne si $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$.

3. Théorème de Rolle.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathbb{D}^1(]a,b[, \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

4. Théorème des accroissements finis.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathbb{D}^1(]a,b[, \mathbb{R})$. Alors $\exists c \in]a,b[$, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

5. Inégalités des accroissements finis.
Soit $f \in \mathbb{D}^1(I, \mathbb{R})$. Si $\exists m, M \geq 0$ tel que $\forall x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $\forall a, b \in I$, $a \leq b$, $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

6. Définition d'une fonction convexe.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I, si $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t))f(y)$.

7. Théorème de recherche d'extremums.
Soit $f \in \mathbb{D}^1(]a,b[, \mathbb{R})$ et $c \in]a,b[$. Si f admet un extremum en c, alors $f'(c) = 0$.

8. Inégalité de Jensen.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors $\forall x_1, \dots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$,
$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Exercice 2 :
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Étudier f en 0.

$x \mapsto \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ par composition. De plus, $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$, donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

Donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathbb{D}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Or

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = 2(1/x^2)^{3/2} e^{-1/x^2}.$$

Par croissance comparée, $y^{3/2} e^y \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0$. Donc $f'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Donc, par théorème satanique, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Or f' continue sur $\mathbb{R}^*$, donc $f'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0)$. Donc f' continue en 0. Donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.