DS 6
Analyse - Arithmétique

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 29 Janvier 2025

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Analyse) :
Le but est d'étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

1. **Préliminaires.**
   Soit $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose
   $$g(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$
   (a) On définit la fonction φ sur $[\arctan(a), \pi/2[$ par
   $$\forall x \in [\arctan(a), \pi/2[,\ \varphi(x) = g(\tan(x)).$$
   Montrer que l'on peut prolonger φ en $\pi/2$.
   On appellera de nouveau φ la fonction ainsi prolongée.
   (b) Montrer qu'il existe $d \in]\arctan(a), \pi/2[$ tel que $\varphi'(d) = 0$.
   (c) En déduire $\exists c \in]a, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.
2. **Étude de f.**
   (a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les variations de f et de f' sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que f possède un seul point fixe α sur $\mathbb{R}$, puis que $\alpha \in [1/3, 1]$.
   (d) Montrer $\exists C \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in [1/3, 1]$, $|f'(x)| \leq C$.
   (e) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1/3 \leq u_n \leq 1$.

(f) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq C^n |1-\alpha|$. Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. **Création d'une suite de polynômes.**

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n(x)}}{(1+x+x^2)^{n+1}}$ où $P_{n+1}(X) = (1+X+X^2)P_n'(X) - (n+1)(2X+1)P_n(X)$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n (n+1)!$.

   (c) Justifier de l'unicité du polynôme P_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

4. **Des relations de récurrences vérifiées par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

   (a) En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x+x^2)f(x) = 1$, établir que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2} = 0.$$

   (b) En déduire
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n' = -n(n+1)P_{n-1}.$$

5. **Étude des racines réelles de P_n.**

   (a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\exists n_0 \geq 2$ tel que β racine de P_{n_0} et P_{n_0-1}, alors β est aussi racine de P_{n_0-2}.

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine réelle en commun.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n et P_n' n'ont pas de racine réelle en commun.
   On va améliorer ce résultat dans la question suivante.

6. **Factorisation de P_n**

   (a) Montrer que f' s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$, et que f'' s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On suppose que $f^{(n)}$ s'annule en n réels distincts $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.

      i. Déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $+\infty$ et $-\infty$.

      ii. En déduire que la fonction $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]\alpha_n, +\infty[$ et sur l'intervalle $]-\infty, \alpha_1[$.

      iii. Montrer que le polynôme $f^{(n+1)}$ s'annule exactement $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$.

Problème 2 (Théorèmes de Wilson et Dickson) :
Le but de ce problème est de fournir la preuve de deux théorèmes d'arithmétique : les théorèmes de Wilson et de Dickson.

Théorème 0.1 (Théorème de Wilson) :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Alors p est premier si, et seulement si, p divise $(p-1)! + 1$.

Théorème 0.2 (Théorème de Dickson) :
Soit $n > 1$. Alors n est premier si, et seulement si, $\exists m \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que
$$(m-1)!(n-m)! \equiv (-1)^m\ [n].$$

1. **Généralités autour du PGCD.**

(a) Montrer que si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a|b$ et $b \wedge c = 1$, alors $a \wedge c = 1$.

(b) Montrer que si $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$, alors $a \wedge (bc) = a \wedge c$ et $(ab) \wedge c = (a \wedge c)(b \wedge c)$.

2. **Théorème de Wilson.**

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$

   (a) Montrer que si p n'est pas premier, alors $(p-1)! + 1 \not\equiv 0\ [p]$.

   On suppose p premier.

   (b) Montrer que si $p = 2$ ou $p = 3$, alors $(p-1)! \equiv -1\ [p]$.

   On suppose maintenant p premier et $p \geq 5$.

   (c) Montrer que $\forall k \in \{2, \ldots, p-2\}$, $\exists v_k \in \mathbb{Z}$ tel que $kv_k \equiv 1\ [p]$.

   (d) En déduire que $\forall k \in \{2, \ldots, p-2\}$, $\exists \alpha_k \in \{2, \ldots, p-2\}$ tel que $k\alpha_k \equiv 1\ [p]$.

   (e) Montrer que $\forall k \in \{2, \ldots, p-2\}$, $\exists! \alpha_k \in \{2, \ldots, p-2\}$, tel que $k\alpha_k \equiv 1\ [p]$.

   (f) En déduire que $(p-2)! \equiv 1\ [p]$.

   (g) Conclure.

3. **Théorème de Dickson.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Supposons qu'il existe $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $(m-1)!(n-m)! \equiv (-1)^m\ [n]$.

   (a) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-m\}$, k et n sont premiers entre eux.

   (b) Soit $k \in \{n-m+1, \ldots, n-1\}$. Montrer que $n \wedge (n-k) = 1$ puis que $n \wedge k = 1$.

   (c) Conclure.