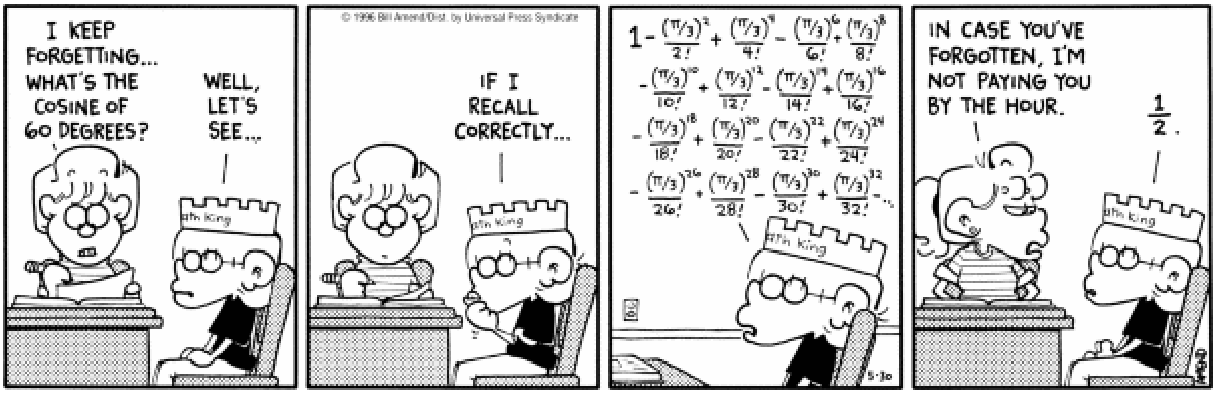
Chapitre 18
Développements Limités

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

4 février 2025



Ce chapitre est dans la lignée directe du chapitre précédent. C'était le but. Pouvoir faire des développements limités. Comme vous l'avez déjà vu en Physique et en SI, les développements limités sont des approximations polynomiales de fonctions au voisinage d'un point (ou l'infini). Ça permet de pouvoir "assimiler" (avec toutes les précautions et la rigueur mathématique qu'on aime bien) une fonction à un polynôme au voisinage de ce point. Et il est beaucoup plus facile de manipuler les polynômes. On va pouvoir même retrouver la fonction à partir de son développement limités.

L'année prochaine, vous étendrez cette notion à des intervalles entiers ! Ce seront les séries entières. C'est très pratique.

Attention par contre. Comme pour les relations de comparaison, on pourra faire tendre notre variable vers n'importe quel valeur réelle finie. Il y a des infinies partout dans $\mathbb{R}$. On peut se rapprocher indéfiniment d'un réel a sans jamais l'atteindre. On a ici une notion d'infiniment proche. Il faudra donc prendre bien garde au lieu où l'on va faire notre développement limité. Comme c'est une notion locale, un DL valable en $a \in \mathbb{R}$ par exemple ne le sera plus forcément en $b \neq a$.

On rappelle que pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on note $\overline{I}$ l'intervalle fermé ayant les même bornes que I dans $\overline{\mathbb{R}}$. On notera également $\mathring{I}$ l'intervalle ouvert correspondant à I, *i.e.* $\mathring{I}$ est le même intervalle que I dans sans ses bornes.

Table des matières

Dans la suite, n sera un entier naturel, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point et toutes les fonctions seront considérées à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (avec précision si besoin est).

1 Généralités

Définition 1.1 (Développement limité, Partie régulière) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

- On dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a si $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tel que
$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$
- La fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ est appelée partie régulière du développement limité de f en a. Et $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ est le reste.

Dit autrement, f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \widetilde{P}(x-a) + o((x-a)^n)$$

Parce qu'on va parler (très très) souvent de développement limité, je noterai $\mathrm{DL}_n(a)$ pour "développement limité en a à l'ordre n".

Un $\mathrm{DL}_n(a)$ donne une information sur le comportement de f en a et seulement en a. On ne peut rien dire à côté de a, même très proche. C'est une relation local (à cause du $\underset{a}{=}$). Elle n'est valable que très proche de a.

Remarque :
Via le changement de variable $x = a + h$, on peut également écrire

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) \underset{h \to 0}{=} \widetilde{P}(h) + o(h^n)$$

Remarque :
Dans un DL_n, chaque terme est négligeable devant celui qui le précède. C'est le dernier terme qui est le plus petit.

Définition 1.2 (DL en un point où la fonction n'est pas définie) :
Si $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et f définie sur $I \setminus \{a\}$, on dit que f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ si $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ admet un DL_n en a^+, $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ admet un DL_n en a^- et si ces deux DL coïncide.

Par soucis de commodité d'écriture, on se placera seulement dans le cas où f est définit sur I entier. Mais il faudrait adapté tous les énoncés au cas ci-dessus aussi.

Proposition 1.1 (Caractérisation de la continuité et dérivabilité par les DL) :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

- f est continue en a si et seulement si f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$$

- f est dérivable en a si et seulement si f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme

$$\exists \kappa \in \mathbb{K},\ f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)\kappa + o(x-a)$$

  et dans ce cas, $f'(a) = \kappa$.

Démonstration :
Supposons f continue en a. Alors, par caractérisation de la continuité par les limites,

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

et la définition des o nous donne alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$$

Réciproquement, supposons $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$. Alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} o(1) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et donc $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$. Donc, par caractérisation de la continuité par les limites, f est continue en a.

Supposons que f soit dérivable. Alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a) \in \mathbb{R}$ par définition. Donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} f'(a) + o(1)$ et donc $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} f'(a)(x-a) + o(x-a)$ et donc f admet un $DL_1(a)$.
Réciproquement, supposons que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \kappa(x-a) + o(x-a)$. Alors dans ce cas $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} \kappa + o(1) \xrightarrow[x\to a]{} \kappa$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \kappa$. □

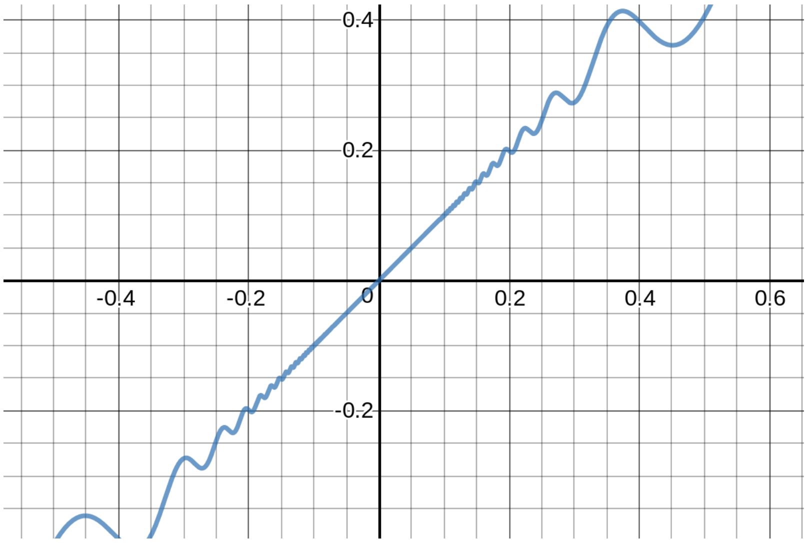
Exemple 1.1 :
Donner un $\mathrm{DL}_0(0)$ et $DL_1(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

⚠ ATTENTION ! ! Ça ne fonctionne que pour les DL de rangs 0 et 1 ! Dès que $n \geq 2$, une fonction f peut admettre un $\mathrm{DL}_n(a)$ sans être n-fois dérivable en a :

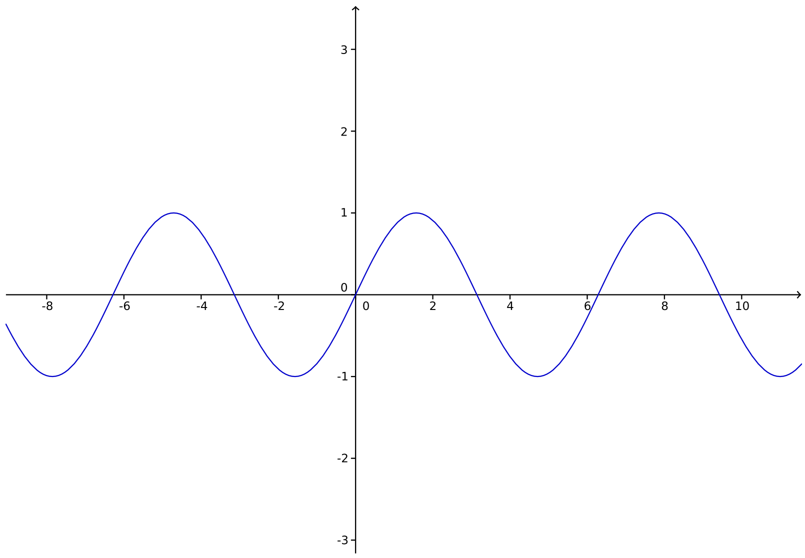
Exemple 1.2 :
Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.



Les développements limités donnent une approximation polynomiale d'une fonction au voisinage d'un point. Plus la précision est meilleure (plus on calcul loin le DL) et meilleure est l'approximation.



DL successif du sinus

Le graphe des DL classiques (qui sont listés plus bas) est disponible que le cahier de prépa.

Remarque :

On notera donc que pour une fonction dérivable en a, on a

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \underbrace{f(a)+f'(a)(x-a)}_{\mathcal{T}_a} + o((x-a)).$$

Autrement dit, on approxime la courbe de f à sa tangente en a au voisinage de a.

Proposition 1.2 (Troncature d'un DL) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors f admet un $\mathrm{DL}_m(a)$ pour tout $m \leq n$ qui s'obtient par troncature :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k (x-a)^k + o((x-a)^m)$$

Démonstration :
C'est simplement la relation

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^m)$$

□

Théorème 1.3 (Unicité du $\mathrm{DL}_n(a)$) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $f : I \to \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors il est unique.

Démonstration :
Supposons que f admette deux $\mathrm{DL}_n(a)$ distincts :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

et

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Soit $m = \min\{k \in \{0, \dots, n\}, a_k \neq b_k\}$. Comme les deux $\mathrm{DL}_n(a)$ sont distincts, m existe (ils diffèrent par un des coefficients). Par troncature, on a donc

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_m(x-a)^m + o((x-a)^m)$$
$$f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_m(x-a)^m + o((x-a)^m)$$

Mais par définition de m, on sait que $\forall k \in \{0,\dots,m-1\}$, $a_k = b_k$. Donc par soustraction, on trouve

$$\begin{aligned} f(x) - f(x) &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k(x-a)^k - \sum_{k=0}^{m} b_k(x-a)^k + o((x-a)^m) \\ &\underset{x\to a}{=} (a_m - b_m)(x-a)^m + o((x-a)^m) \end{aligned}$$

c'est à dire $(a_m - b_m)(x-a)^m \underset{x\to a}{=} o((x-a)^m)$. En prenant $x \neq a$ dans un voisinage de a, on a $x - a \neq 0$ et on peut donc simplifier par $(x-a)^m$. La relation reste toujours valable et donc $a_m - b_m \underset{x\to a}{=} o(1)$ donc $a_m - b_m \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Mais comme $a_m - b_m$ est une constante, on en déduit $a_m - b_m = 0$. C'est à dire $a_m = b_m$. D'où ☠. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il y a un théorème d'unicité des DL mais il n'y a pas de théorème d'existence. Il existe des fonctions qui n'ont pas de DL. Par exemple, $x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de DL en 0 puisqu'elle n'existe pas en 0 et ne peut même pas y être prolongée par continuité.

Donc les DL, c'est pas automatique. On ne peut pas toujours en faire.

Définition 1.3 (Partie principale) :
Si $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Si $p = \min\{k \in \{0,\dots,n\}, a_k \neq 0\}$ existe, on appelle partie principale de f en a la fonction $x \mapsto a_p(x-a)^p$.

Remarque :
Autrement dit, la partie principale de f en a est le premier terme non nul dans le développement limité de f en a. Bien sûr, pour obtenir la partie principale de f, il faut donc aller assez loin dans le calcul du développement limité. Par exemple, si $x \mapsto a_3(x-a)^3$ est la partie principale de f en a, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^2)$. Donc on ne peut pas trouver la partie principale de f. Il faut calculer le développement limité de f à l'ordre au moins 3.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention ! Toutes fonctions n'admet pas de partie principale. C'est le premier terme non nul. Si f a un DL nul à tout ordre en a, elle n'a pas de partie principale. Le problème vient de l'existence du minimum.

Définition 1.4 (Forme normalisée) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Si $p = \min\{k \in \{0, \dots, n\}, a_k \neq 0\}$ existe, on appelle forme normalisée du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f toute expression de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} (x-a)^p \left(\sum_{k=0}^{n-p} b_k (x-a)^k + o((x-a)^{n-p}) \right)$$

On a donc essentiellement factorisé par la partie principale. De cette façon, on obtient un polynôme de coefficient constant non nul.

Remarque :
Dans la forme normalisé, on a

$$\forall k \in \{0, \dots, n-p\},\ b_k = a_{k+p}$$

avec en particulier $b_0 = a_p \neq 0$.

Proposition 1.4 (DL et équivalent) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$, et $f : I \to \mathbb{K}$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie principale $a_p(x-a)^p$, alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$$

On peut également écrire cette relation sous la forme

$$f(a+h) \underset{x \to a}{\sim} a_p h^p$$

Démonstration :
On a $f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k (x-a)^p + o((x-a)^n)$. Mais $\forall k \geq p+1$, $(x-a)^k \underset{x \to a}{=} o((x-a)^p)$ donc $f(x) \underset{x \to a}{=} a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$ $\square$

Remarque :
Autrement dit, une fonction est équivalente à sa partie principale en tout point (si elle existe). Les DL permettent donc d'obtenir des équivalents des fonctions. C'est en fait l'intérêt principale des développements limités.

On va développer ici un outil qui va nous permettre de trouver un équivalents à n'importe quel fonction en tout point (ou presque). On va donc pouvoir calculé les limite de n'importe quelle fonctions en n'importe quel point.

Proposition 1.5 (DL d'une fonction paire, impaire) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et $f : I \to \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et si f est paire (resp. impaire), alors la partie régulière de f n'admet que des termes d'exposants pairs (resp. impair).

Autrement dit, le polynôme du DL de f a la même parité que f. Ce qui paraît assez logique dans la mesure où ce polynôme est "essentiellement" f. Il est normal qu'il hérite des même propriétés de f.

Démonstration :
f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + +o(x^n)$$

et par le changement de variable $y = -x$, on obtient :

$$f(-x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n)$$

Or f est paire, donc les deux $\mathrm{DL}_n(0)$ doivent être égaux par unicité du DL. Donc

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ a_k = (-1)^k a_k$$

et donc on en déduit la résultat. □

Proposition 1.6 (Signe et DL) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL en a.

Le signe de f au voisinage de a est déterminé par le signe de sa partie principale.

Démonstration :
Si $f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + a_{p+q}(x-a)^{p+q} + o((x-a)^{p+q})$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$ donc f est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a (cad du signe de a_p si p est paire et du signe de a_p pour $x > 0$ et du signe de $-a_p$ si $x < a$ si p est impair). □

2 DL, Dérivées et Primitives

Lemme 2.1 ("Les o passent aux primitives") :
Soit $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < a < \beta$ et $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{K}$ admettant une primitive F sur $]\alpha, \beta[$ (donc une fonction $F :]\alpha, \beta[\to \mathbb{K}$ dérivable telle que $F' = f$). Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^n)$, alors $F(x) \underset{x \to a}{=} F(a) + o((x-a)^{n+1})$

Démonstration (*** (Très très bonne démo, genre fin de partie 3)) *:*
On pose $I =]\alpha, \beta[$. Soit $\varepsilon > 0$.

On pose $\varphi = F - F(a)$. Alors φ est définie, continue et dérivable sur I car $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev. Et $\forall x \in I$, $\varphi'(x) = F'(x) = f(x)$. Donc $\varphi'(x) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^n)$, donc $\frac{\varphi'(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Donc, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \subset I$, $|\varphi'(x)| \leq \varepsilon |x-a|^n$. En particulier, si on fixe $x \in]a, a+\eta]$, l'intervalle $[2a-x, x] = [a-(x-a), a+(x-a)]$ est un intervalle centré en a inclus dans $[a-\eta, a+\eta]$. En effet, on a clairement $x \leq a+\eta$ par choix de x et $2a - x \geq 2a - a - \eta = a - \eta$. On a donc

$$\forall t \in [2a-x, x], \ |\varphi'(t)| \leq \varepsilon |t-a|^n \leq \varepsilon |x-a|^n$$

et $|x-a|^n$ est une constante par rapport à t. On peut donc appliquer L'Inégalité des Accroissements Finis sur l'intervalle $[2a-x, x]$ à l'application $t \mapsto \varphi'(t)$ et à x et a qui sont dans l'intervalle $[2a-x, x]$ en particulier. On obtient donc

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} \right| \leq \varepsilon |x-a|^n$$

Mais $\varphi(a) = 0$ donc $\left| \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| \leq \varepsilon$. Et ce raisonnement est valable pour tout $x \in]0, a+\eta]$. Si $x \in [a-\eta, a[$, en appliquant une petite symétrie dans le raisonnement, on obtient le même résultat. Finalement $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \setminus \{a\}$, $\left| \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| \leq \varepsilon$.

Or ce raisonnement a été fait avec un $\varepsilon > 0$ arbitraire. On a donc $\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{n+1}} \xrightarrow[x \to a]{} 0$ par définition et donc $F(x) - F(a) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^{n+1})$ par définition de φ. □

Théorème 2.2 (DL d'une primitive) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{K}$ admettant une primitive F sur I et un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ qui est

$$F(x) \underset{x \to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Démonstration :
On définit $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ sur I. Cette fonction est continue sur I comme somme de fonction qui le sont. On pose également $G(x) = F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$ sur I. Cette fonction est dérivable sur I comme somme de fonction qui le sont. Et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k = g(x)$. Donc G est une primitive de g (c'est même la primitive de g qui s'annule en a).

On sait d'autre part, que $g(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$. On en déduit donc, par le lemme précédent, que $G(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^{n+1})$, autrement dit que $F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$. Donc F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ qui est bien de la forme annoncé par unicité du DL_n. □

On va donc pouvoir "primitiver" les DL. Les DL passent très bien par "primitivation".

Exemple 2.1 :
Déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\arctan$.

Théorème 2.3 (DL d'une dérivée) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Si f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$, alors

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k(x-a)^{k-1} + o((x-a)^{n-1})$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il est ABSOLUMENT nécessaire de savoir ici que f' admet un DL_{n-1} pour pouvoir dériver le DL. L'intégration permet de lisser encore un peu davantage une fonction. Donc il n'y pas de soucis. Mais lors de la dérivation, on perd en “lissitude”. Par exemple dans l'exemple au dessus de la fonction $x \mapsto x + x^3 \sin(1/x^2)$, la dérivée de cette fonction n'est pas continue en 0 (donc la fonction n'est pas dérivable en 0). Ce qu'on a perdu en “lissitude” en dérivant rend le DL faux. La fonction de base est tout juste assez lisse pour pouvoir avoir un DL_2 (mais on ne pouvait pas aller plus loin) et la dérivée n'est pas assez lisse pour pouvoir en avoir un.

Les DL sont très lié à la “lissitude” de la fonction. Forcément puisqu'on écrit localement notre fonction comme un polynôme. Et il n'y a rien de plus lisse qu'un polynôme.

Démonstration :
f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$ qui est donc de la forme

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$$

Comme f' admet une primitive f, par le lemme précédent, on a $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^n$. Mais par unicité du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f et le fait que $f(a) = a_0$, on a

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\},\ a_{k+1} = \frac{b_k}{k+1}$$

c'est à dire $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $ka_k = b_{k-1}$ d'où le résultat. □

Remarque :
On notera qu'ici, comme $n \geq 1$, f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ et est donc dérivable en a, donc en particulier continue, ce qui nous permet d'avoir $a_0 = f(a)$ qu'on a utilisé dans la démo sans plus de précision ...

Théorème 2.4 (Formule de Taylor-Young) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et il est de la forme :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration :
On va faire une récurrence sur n. Si $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$, par caractérisation de la continuité par les DL, $\forall a \in I,\ f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$. C'est encore vrai pour $n = 1$ toujours par caractérisation de la dérivabilité par les DL.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}),\ \forall a \in I,\ f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$. Alors, par définition, $f' \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$. Donc, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\forall a \in I,\ f'(x) &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)\\ &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).\end{aligned}$$

Or f est une primitive de f' sur I (par définition), donc, par DL d'une primitive,

$$\begin{aligned}\forall a \in I,\ f(x) &\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)k!}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})\\ &\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1})\\ &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1})\end{aligned}$$

D'où la formule de Taylor-Young par récurrence. □

Remarque :
Ce résultat pourra se prouver un peu plus tard comme un corollaire d'un résultat plus fort d'intégration : la formule de Taylor avec reste intégral.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention, ce résultat n'est valable que si f est définie en a, et de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de a !

On retiendra que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en tout point de I.

Remarque :
On a donc, sous forme développée,

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots + o((x-a)^n)$$

Corollaire 2.5 :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{K}$.
Si $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$, alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 2.6 (DL de la dérivée d'une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Alors f' admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui s'obtient en dérivant terme à terme le $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ de f.

Démonstration :
f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, donc f' est de classe $\mathcal{C}^n$ par définition. Donc f' admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ par Taylor-Young et le théorème 2.3 achève la démo. □

Exemple 2.2 :
Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.

Remarque :
Le théorème de Taylor-Young est donc un théorème très fort. Il permet de connaître la fonction assez précisément au voisinage d'un point si on la connaît suffisamment en profondeur en ce point. Autrement dit, la connaissance des valeurs de toutes les dérivées successives de la fonction en un point permet de la connaître au voisinage de ce point. Ce théorème fait un lien entre "l'horizontalité" de la fonction et sa "verticalité". C'est une méthode pour reconstruire la fonction au voisinage d'un point à partir que de quelques valeurs.

3 DL de référence

On donne ici plein de DL en 0 obtenus par la formule de Taylor-Young. On donne en fait tous les DL des fonctions de référence que l'on sait être de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ces DL sont bien sûr à connaître.

Les formules données ci-dessous sont un peu en avance. On a besoin de quelques petites opérations sur les DL pour pouvoir les établir. On va donner ces opérations juste en dessous. Mais c'est un bon moment pour donner les DL célèbres.

Il y a un graphe sur cahier de prépa qui permet de "voir" ces DL de référence à différents ordre avec la fonction qu'ils approchent.

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

  (on reconnaît une somme géométrique)

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

  Ce DL est obtenu en faisant le changement de variable $x \rightsquigarrow -x$ dans le DL précédent.

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto e^x$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

  Ce DL est primordial. Il FAUT le connaître. On notera aussi $e^{tx} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} x^k + o(x^n)$. Ce sera utile dans votre carrière de mathématicien.

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$.

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n)$$

  C'est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1-x)$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

  Là aussi, obtenue grâce au DL précédent et le changement de variable $x \rightsquigarrow -x$, ou alors grâce à une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^p$ avec $p \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^p \underset{x\to 0}{=} \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} x^k + o(x^n) & \text{si } n \le p \\ \\ \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k + o(x^n) & \forall n \ge p \end{cases}$$

  Il correspond à la troncature du binôme de Newton pour des ordres plus petit que p et le développement du binôme de Newton en entier pour des ordres plus grand que p.

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

Très très utile. C'est la formule qui donne les DL de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et même $x \mapsto \sqrt{1-x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ par une petit changement de variable qu'on connaît bien.

- $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \cos(x)$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

- $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $x \mapsto \sin(x)$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

- $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + +o(x^{2n+1})$$

- $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

- $\mathrm{DL}_8(0)$ de $x \mapsto \tan(x)$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

Attention, il n'y a pas de formule générale pour celui là. Les deux premiers termes (à l'ordre 3) sont à connaître et les autres à savoir retrouvés à partir du sinus et cosinus ou toute autre méthode.

- $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $x \mapsto \arctan(x)$

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

C'est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qu'on connaît.

- $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $x \mapsto \arcsin(x)$

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2(2k+1)}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})\\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

C'est aussi une primitive.

- $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $x \mapsto \arccos(x)$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

C'est pas le plus dur, celui là. On notera qu'on aurait pu faire le contraire. Trouver le DL de $\arccos$ par primitivation et en déduire celui du $\arcsin$.

Remarque :
En fait, on peut définir

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ et qui va coïncider avec le coefficient binomial si $\alpha \in \mathbb{N}$. Avec cette notation, on peut alléger la formule de $(1+x)^\alpha$ et la faire ressemble à une sorte de formule de Newton.

Pour obtenir le DL d'une fonction en a, on "relocalise" le problème en 0 par le changement de variable $x = a + h$ pour pouvoir utiliser ensuite les DL de référence ci-dessus.

Toutes les opérations autorisées seront détaillées juste en dessous, y compris celles utilisés pour établir les formules de cette partie.

Exemple 3.1 :
Déterminer le $\mathrm{DL}_2(1)$ de $x \mapsto e^x$, le $\mathrm{DL}_3(\pi/3)$ de $\cos$ et le $\mathrm{DL}_2(2)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$.

4 DL et opérations

4.1 Combinaison linéaire

Proposition 4.1 (Combinaison linéaire) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f, g : I \to \mathbb{K}$ admettant des $\mathrm{DL}_n(a)$ de parties régulières respectivement P et Q (dans $\mathbb{K}[X]$), donc

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \widetilde{P}(x-a) + o((x-a)^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to a}{=} \widetilde{Q}(x-a) + o((x-a)^n)$$

Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière $\lambda P + \mu Q$, i.e.

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to a}{=} \lambda\widetilde{P}(x-a) + \mu\widetilde{Q}(x-a) + o((x-a)^n)$$

ATTENTION ! On ne peut sommer que des DL de même ordre.

Démonstration :

On a, au voisinage de a :

$$\frac{(\lambda f+\mu g)(x)-(\widetilde{\lambda P+\mu Q})(x-a)}{(x-a)^n}=\lambda\frac{f(x)-\widetilde{P}(x-a)}{(x-a)^n}+\mu\frac{g(x)-\widetilde{Q}(x-a)}{(x-a)^n}\xrightarrow[x\to a]{}0$$

□

Corollaire 4.2 :
L'ensemble des applications à valeurs dans $\mathbb{K}$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application à valeur dans $\mathbb{K}_n[X]$ qui, à une fonction, associe le polynôme associé à sa partie régulière est linéaire.

Exemple 4.1 :
Donner un $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $x\mapsto 2\cos x-3\operatorname{sh}x$.

4.2 Produits

Proposition 4.3 (Produit de DL) :
Soit $I\subset\mathbb{R}$, $a\in I$, $n\in\mathbb{N}$, $f,g:I\to\mathbb{K}$ admettant des $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière respectivement $P\in\mathbb{K}[X]$ et $Q\in\mathbb{K}[X]$.

Alors fg admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière PQ, *i.e.*

$$\left.\begin{aligned}f(x)&\underset{x\to a}{=}\widetilde{P}(x-a)+o((x-a)^n)\\ g(x)&\underset{x\to a}{=}\widetilde{Q}(x-a)+o((x-a)^n)\end{aligned}\right\}\implies fg(x)\underset{x\to a}{=}\widetilde{PQ}(x-a)+o((x-a)^n)$$

Démonstration :
Au voisinage de a, on a

$$\frac{fg(x)-\widetilde{PQ}(x-a)}{(x-a)^n}=\frac{f(x)-\widetilde{P}(x-a)}{(x-a)^n}g(x)+\widetilde{P}(x-a)\frac{g(x)-\widetilde{Q}(x-a)}{(x-a)^n}$$

Or $\frac{f(x)-\widetilde{P}(x-a)}{(x-a)^n}\xrightarrow[x\to a]{}0$ car $\widetilde{P}(x-a)$ est la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f, $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}\widetilde{Q}(0)$ car g admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, $\widetilde{P}(x-a)\xrightarrow[x\to a]{}\widetilde{P}(0)$ car P est un polynôme donc continue en 0 et $\frac{g(x)-\widetilde{Q}(x-a)}{(x-a)^n}\xrightarrow[x\to a]{}0$ car Q est la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$ de g.

Finalement, les opérations sur les limites, nous donne le résultat. □

Exemple 4.2 :
Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^x \cos x - 2\sin x$ et de $\tan$.

4.3 Compositions

Proposition 4.4 (DL d'une composée) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$, et $g : f(I) \to \mathbb{K}$.
Si $f - f(a)$ admet un $\mathrm{DL}(a)$ de partie principale $a_p(x-a)^p$ avec $p \leq n$, et g admet un $\mathrm{DL}_q(f(a))$ où $q = \min\{k \in \mathbb{N}, k \geq n/p\}$, alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui est obtenue en substituant le $\mathrm{DL}(a)$ de f dans le $\mathrm{DL}_q(f(a))$ de g et en tronquant à l'ordre n.

Autrement dit :

- On détermine un $\mathrm{DL}_{k+p}(a)$ de $f - f(a)$ de partie principale $p \leq n$, donc $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x-a)^p(a_p + a_{p+1}(x-a) + \cdots + a_{p+k}(x-a)^k + o((x-a)^k))$.
- On détermine un $\mathrm{DL}_q(f(a))$ de g avec $q \geq n/p$. Donc $g(y) \underset{y \to f(a)}{=} b_0 + b_1(y - f(a)) + b_2(y - f(a))^2 + \cdots + b_q(y - f(a))^q + o((y - f(a))^q)$.
- On fait le changement de variable $y = f(x)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
g \circ f(x) &\underset{x \to a}{=} \sum_{j=0}^{q} b_j (f(x) - f(a))^j + o((f(x) - f(a))^q) \\
&\underset{x \to a}{=} \sum_{j=0}^{q} b_j \left((x-a)^p \sum_{i=0}^{k} a_{p+i}(x-a)^i + o((x-a)^k) \right)^j + o\left((x-a)^{pq} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{p+j}(x-a)^j \right)^q \right) \\
&\underset{x \to a}{=} b_0 + \sum_{j=1}^{q} b_j (x-a)^{pj} \left(\sum_{i=0}^{\min(k,n/j)} a_{p+i}(x-a)^i \right)^j + o((x-a)^n)
\end{aligned}$$

- On tronque tout ça à l'ordre n.

Ou encore, on écrit $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \widetilde{P}(x-a) + o((x-a)^p)$, $g(y) \underset{y \to f(a)}{=} \widetilde{Q}(y - f(a)) + o((y - f(a))^q)$ et enfin

$$g(f(x)) \underset{x \to a}{=} \overline{\widetilde{Q}\left(\widetilde{P}(x-a)\right)}^{n} + o(x-a)^n$$

où $\overline{\widetilde{Q}\left(\widetilde{P}(x-a)\right)}^{n}$ désigne la troncature à l'ordre n de la fonction polynomiale $\widetilde{Q \circ P}$.

Remarque :
L'ordre dans lequel on compose les DL n'a pas d'importance. Pour avoir la DL de $g \circ f$, que l'on compose calcul $g(\mathrm{DL}(f))$ et que l'on fasse le DL de tout ça, ou que l'on calcul $\mathrm{DL}_{f(x)}(g)$ que l'on compose ensuite par le DL de f ne change absolument rien. C'est une histoire de goût.

Exemple 4.3 :
Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^{x+x^2}$.

Exemple 4.4 :
Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{2+\cos x}$.

Exemple 4.5 :
Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^{\frac{1}{1+x}}$

4.4 Quotients

Proposition 4.5 (DL d'un inverse) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{K}$ admettant un $\mathrm{DL}(a)$ de partie principale $a_p(x-a)^p$ avec $p \leq n$. Alors $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$

Concrètement :

- On sait que

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p \left(\sum_{k=0}^{q} \frac{a_{p+k}}{a_p}(x-a)^k + o((x-a)^q) \right) \\ &\underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p \left(1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-a) + \cdots + \frac{a_{p+q}}{a_p}(x-a)^q + o((x-a)^q) \right) \end{aligned}$$

- On écrit
$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_p(x-a)^p \frac{f(x)}{a_p(x-a)^p}} = \frac{1}{a_p(x-a)^p} \frac{1}{1+g(x)}$$
avec $g(x) = \frac{f(x)}{a_p(x-a)^p} - 1 \underset{x\to a}{=} \sum_{k=1}^{q} \frac{a_{p+k}}{a_p}(x-a)^k + o((x-a)^q) \underset{x\to a}{=} \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-a) + \cdots + \frac{a_{p+q}}{a_p}(x-a)^q + o((x-a)^q)$.
- On fait alors le composée de DL de g et de $x \mapsto \frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+\cdots+(-1)^m u^m + o(u^m)$ avec qm le premier entier $\geq n/p$.

- On tronque tout ça à l'ordre qu'il faut.

Pour le DL d'un quotient, on fait le DL numérateur fois le DL de l'inverse du dénominateur. C'est donc le DL d'un produit dont l'un des facteurs est une composée.

Exemple 4.6 :
Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

Exemple 4.7 :
Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{e^x-1}$.

5 Applications

5.1 Calcul de limites

Chercher un limite d'une fonction en a, c'est déterminer son $\mathrm{DL}_0(a)$.

Exemple 5.1 :
Déterminer la limite de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^3}$ en 0.

Pour obtenir un équivalent en a d'une fonction, on cherche la partie principale du DL de cette fonction en a, c'est à dire le premier terme non nul du DL de cette fonction en a. Il n'y a aucune méthode générale pour faire ça.

Exemple 5.2 :
Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$.

5.2 Position d'une courbe par rapport à ses tangentes ou à une asymptotes

Un DL d'une fonction en $a \in \mathbb{R}$, permet de donner une équation de la tangente à la courbe en a ainsi que la position au voisinage de a de la courbe par rapport à la tangente :

Si on a $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + (x-a)^2\widetilde{P}(x-a) + o((x-a)^n)$ pour une fonction continue, alors on sait que $a_0 = f(a)$, $a_1 = f'(a)$ et que la tangente à la courbe en a est donné par l'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a) = a_0 + a_1(x-a)$. La position relative d'une par rapport à l'autre est donc déterminer par le signe de la différence au voisinage de a, c'est à dire de $f(x) - a_0 - a_1(x-a) \underset{x\to a}{=} (x-a)^2\widetilde{P}(x-a) + o((x-a)^n)$ qui est du signe de $\widetilde{P}(x-a)$ au voisinage de a.

On procède de la même manière avec les asymptotes (voir juste en dessous).

Exemple 5.3 :
Déterminer la position de la fonction f par rapport à sa tangente en 1 pour $f(x) = e^{-x}\arctan(x)$.

5.3 Développements asymptotiques

Un développement asymptotique est une sorte de DL généralisé. On ne demande plus cette fois que les éléments constitutif du DL soit des monômes. Il suffit de fonctions dont chacune est négligeable devant la suivante au point considéré.

Exemple 5.4 :
Un développement asymptotique de 2 terme de $x \mapsto x^x$ en 0 est

$$x^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x\ln x + o(x\ln x)$$

L'intérêt majeure des développements asymptotiques est de permettre de donner DL en $\pm\infty$. Il faut faire intervenir des puissance de $\frac{1}{x}$. En pratique, on opère le changement de variable $u = 1/x$ et on se ramène alors à un DL en 0.

Exemple 5.5 :
Déterminer une asymptote de $x \mapsto \sqrt{x^2+x}$ en $+\infty$.

Exemple 5.6 :
Faire un développement asymptotique de 4 termes de $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ et en déduire une asymptote en $+\infty$.

Exemple 5.7 :
Déterminer une courbe asymptotique de $x \mapsto x^{1+1/x}$ en $+\infty$.

5.4 Extremums

Proposition 5.1 (DL et extremums) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $a_n \neq 0$.

Alors f présente un extremum local en a si, et seulement si $n \equiv 0$ $[2]$.

Et dans ce cas :

(i) Si $a_n < 0$, alors f admet un maximum local en a.

(ii) Si $a_n > 0$, alors f admet un minimum local en a.

Corollaire 5.2 :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

f admet un extremum local en a si, et seulement si, $\min\{k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(a) \neq 0\}$ existe et est pair.

!!! ATTENTION !!!

⚠ L'ensemble $\{k \geq 1,\ f^{(k)}(a) \neq 0\}$ peut être vide : $f : x \mapsto e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$. Et pourtant, f admet un minimum local en 0 (c'est même un minimum global).

Dans le cas d'un $\mathrm{DL}_2(a)$ on a :

Corollaire 5.3 (DL2 et extremums) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$.

Si f admet un $\mathrm{DL}_2(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

alors :

(i) Si f admet un extremums local en a, alors $a_1 = 0$.

(ii) Si $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$, alors f admet un maximum local en a.

(iii) Si $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$, alors f admet un minimum local en a.

On retrouve des choses connus dans le cas d'une fonction dérivable (dans ce cas, $a_1 = f'(a)$ et la condition qui va avec sur les extremums).

Exemple 5.8 :
Montrer que $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que c'est alors un maximum local.

5.5 Prolongements

Avec les DL, on peut reformuler les différents théorèmes qui sont égrainés dans les chapitres précédents en :

- Si f n'est pas définie en a mais admet un $\mathrm{DL}_0(a)$, évidemment, elle est prolongeable par continuité en a.
- Si on prolonge f en a et que ce prolongement admet un $\mathrm{DL}_1(a)$, alors f est dérivable en a tout court.
- Si f est dérivable au voisinage de a mais n'est pas définie en a et f et f' admettent toutes les deux un $\mathrm{DL}_0(a)$, alors f est prolongeable par continuité en a et le théorème satanique nous dit alors que f est dérivable en a.
- Si f n'est pas définie en a, mais de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a et $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}$ admet un $\mathrm{DL}_0(a)$, alors on peut appliquer le théorème satanique à chaque étage (sauf au rez-de-chaussée) et la fonction est prolongeable par continuité en a en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en a.