



Chapitre 18 - TD : Développements Limités

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

4 février 2025

1 DL

Exercice 1 :

Déterminer les DL des fonctions indiqués au points indiqués et à l'ordre indiqués. Bref, faire ce qu'on demande.

1. $DL_4(1) : \frac{\ln x}{x^2}$
2. $DL_5(0) : \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch}(x)$
3. $DL_3(0) : \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
4. $DL_3(1) : \cos(\ln(x))$
5. $DL_3(0) : \sqrt{3 + \cos x}$
6. $DL_3(0) : \ln(1 + \sqrt{1+x})$
7. $DL_2(0) : (1+x)^{1/x}$
8. $DL_3(0) : \frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
9. $DL_2(0) : \frac{\arctan x}{\tan x}$
10. $DL_2(0) : \frac{\sin x}{e^x-1}$
11. $DL_3(1) : \frac{x-1}{\ln(x)}$
12. $DL_4(0) : \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right)$
13. $DL_4(0) : \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$
14. $DL_3(0) : \ln(2 + \sin(x))$
15. $DL_3(0) : \ln(1 + e^x)$
16. $DL_6(\pi) : \ln(2 + \cos(x))$
17. $DL_3(0) : \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$
18. $DL_3(0) : \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$
19. $DL_4(0) : e^{\cos x}$
20. $DL_7(0) : x(2 + \cos x) - 3 \sin x$
21. $DL_5(a) : x^a - a^a$
22. $DL_7(0) : \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$
23. $DL_2(0) : \frac{\cos(\sin(x)) - \cos(x)}{x^4}$
24. $DL_3(\pi/2) : \frac{1 + \ln(\sin(x)) - \sin(x)}{\cos(x)^4}$

Exercice 2 :

Déterminer les DL des fonctions suivantes :

1. $DL_2(0)$ de $x \mapsto (1 + \arctan x)^{\frac{x}{\sin(x)^2}}$
2. $DL_2(a)$ de $x \mapsto \frac{x^a - a^x}{\arctan(x) - \arctan(a)}$.

3. $DL_2(2)$ de $x \mapsto \left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{\frac{1}{2-x}}$.
4. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{e^{1-\sin(x)}-e^{1-\tan(x)}}{\tan(x)-\sin(x)}$.

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln(e^x - 1)}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) \right)$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan(x)} - \sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x)) - \cos(x)}{1 - \cos(\sin(x^2))}$ |

Exercice 4 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le $DL_n(0)$ de

$$x \mapsto \ln \left(\sum_{k=0}^n x^k \right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right)$

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $DL_{2n+2}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.

Exercice 6 :

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$ admet une réciproque définie sur \mathbb{R} et former le $DL_5(0)$ de f^{-1} .

On utilisera le fait que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7 :

Déterminer les réels a, b tels que

$$f(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

ait une partie principale en 0 la plus petite possible (donc d'un ordre le plus grand possible).

2 Théorème satanique, le retour !

Exercice 8 :

Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0. Montrer alors que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$. Quelle est la position relative de f par rapport à sa tangente en 0 ?

Exercice 9 (sinus cardinal) :

On définit le sinus cardinal, noté sinc , par $\text{sinc} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

Montrer que φ peut être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , bornée dont le maximum est atteint en 0 et qui vaut 1.

Le sinus cardinal est une fonction classique qui intervient beaucoup en physique.

Exercice 10 :

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\tan(x) - x}{x^3}$$

peut être prolongée en une fonction \mathcal{C}^1 sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 11 (Exemple de fonction non nulle ayant un $\text{DL}_n(0)$ nul) :

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est \mathcal{C}^∞ et déterminer le $\text{DL}_n(0)$ de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 :

soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } 0 \end{cases}$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Montrer que f est continue en 0
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Étudier les variations de f
4. Déterminer le $\text{DL}_3(1)$ de f
5. Préciser l'équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C} au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{T} .

Exercice 13 (Physique : Optique ondulatoire) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$.

1. Donner le domaine de définition de f_n .
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$, f_n est prolongeable par continuité en $k\pi$. On considérera f_n ainsi prolongée.
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$, f_n est dérivable en $k\pi$ et donner sa dérivée en ce point.
4. Étudier la parité de f_n .
5. Étudier la périodicité de f_n .
6. Montrer que f_n est de classe \mathcal{C}^1 .
7. Étudier les maximums de $|f_n|$.
8. Montrer que la largeur des pics d'extremums sont de plus en plus fins en fonction de n (on appelle pic la distance entre les deux zéros de f_n encadrant un extremum). Autrement dit, montrer que la largeur des pics tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.