NOM :
Prénom :

Mardi 04 Février 2025

Interrogation 17

Polynômes 2

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'un polynôme scindé.
Un polynôme est dit scindé s'il peut s'écrire comme le produit de polynômes de degré 1, *i.e.* $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$.

2. Caractérisation de la multiplicité par les dérivées.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$. a est une racine de P de multiplicité m si, et seulement si, $\widetilde{P}(a) = \widetilde{P'}(a) = \dots \widetilde{P^{(m-1)}}(a) = 0$ et $\widetilde{P^{(m)}}(a) \neq 0$.

3. Théorème de D'Alembert-Gauss.
Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme de degré non nul admet au moins une racine.

4. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant < 0.

5. Définition des polynômes interpolateur de Lagrange.
Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On définit les polynômes interpolateurs de Lagrange $L_0, \dots, L_n$ en $x_0, \dots, x_n$ par

$$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ L_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

6. Relations coefficients/racines (générale).
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé de degré n et $x_1, \dots, x_n$ ses racines comptées avec multiplicité. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \text{ et } \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

7. Propriétés des polynômes interpolateur de Lagrange.
Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $L_0, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange en $x_0, \dots, x_n$. Alors $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(L_k) = n$, $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et $\forall i, j \in \{0, \dots, n\}$, $\widetilde{L_i}(x_j) = \delta_{i,j}$.

8. Caractérisation de la multiplicité par la divisibilité.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$. a est une racine de P de multiplicité m si, et seulement si, $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - a)^m Q(X)$ et $\widetilde{Q}(a) \neq 0$.

Exercice 2 :

Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 1 \end{cases}$

Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} x + xy + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{xy+xz+yz}{xyz} = 1 \\ \frac{x+y+z}{xyz} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = xyz \\ xyz = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+xz=1 \\ xyz=1 \end{cases}$$

$\iff x,y,z$ racines de X^3-X^2+X-1 relations coeff/racines

$\iff x,y,z$ racines de $(X^2+1)(X-1)$

$\iff x,y,z$ racines de $(X-i)(X+i)(X-1)$

$\iff (x,y,z)\in\{(1,i,-i),(1,-i,i),(i,1,-i),(i,-i,1),(-i,1,i),(-i,i,1)\}$