NOM :
Prénom :

Mardi 28 Janvier 2025

Interrogation 16

Polynômes 1

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Division euclidienne polynomiale.

Soit $B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$. Alors $\forall A \in \mathbb{K}[X]$, $\exists!(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$, $0 \leq \deg(R) < \deg(B)$.

2. Formule de Taylor polynomiale.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{P}^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

3. Définition degré d'un polynôme.

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. Si $P \neq 0$, on définit le degré de P, noté $\deg(P)$, par $\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0\}$. Et si $P = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. Et on pose $\deg(P) = -\infty$.

4. Degré d'une somme de polynômes.

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. Et $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q)) \iff \deg(P) \neq \deg(Q)$ ou $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\text{coeff dom}(P) + \text{coeff dom}(Q) \neq 0$.

5. Listes des polynômes inversibles.

$\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}_0[X] = \{P \in \mathbb{K}[X],\ \deg(P) = 0\}$. Les polynômes inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

6. Définition d'une racine d'un polynôme.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P si $\widetilde{P}(a) = 0$

7. Définition d'une famille de polynômes échelonnée en degré.

Soit $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On dit que la famille de polynômes $(P_0, \dots, P_n)$ est échelonnée en degré si $((\deg(P_k))_{0 \leq k \leq n}$ est strictement croissante.

8. Définition du polynôme dérivé.

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivée de P, noté P', par $P'(X) = 0$ si $\deg(P) \leq 0$ et $P'(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k$ si $\deg(P) > 1$.

Exercice 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P_n(X) = X^n + (X+1)^n + (X+2)^n$ par $B(X) = X^3 - X$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = X^n + (X+1)^n + (X+2)^n$ et $B(X) = X^3 - X = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$. Alors, par division euclidienne, $\exists Q_n, R_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P_n = BQ_n + R_n$ et $0 \leq \deg(R_n) < \deg(B) = 3$.

Donc $\exists a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que $R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n$. Puis, par évaluation, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P_n}(x) = \widetilde{B}(x)\widetilde{Q_n}(x) + \widetilde{R_n}(x)$. En particulier

$$\begin{cases} 1 + 2^n = \widetilde{P_n}(0) =_w tR_n(0) = c_n \\ 1 + 2^n + 3^n = \widetilde{P_n}(1) = \widetilde{R_n}(1) = a_n + b_n + c_n \\ (-1)^n + 1 = \widetilde{P_n}(-1) = \widetilde{R_n}(-1) = a_n - b_n + c_n \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + 2^n = c_n & \\ 3^n = a_n + b_n & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (-1)^n - 2^n = a_n - b_n & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2^n = c_n & \\ \frac{(-1)^n - 2^n + 3^n}{2} = a_n & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_2 + L_3) \\ \frac{3^n + 2^n - (-1)^n}{2} = b_n & L_3 \leftarrow \frac{1}{3}(L_2 - L_3) \end{cases}$$

D'où le reste de la division euclidienne de P_n par B est :

$$R_n(X) = \frac{3^n - 2^n + (-1)^n}{2} X^2 + \frac{3^n + 2^n - (-1)^n}{2} X + 1 + 2^n.$$