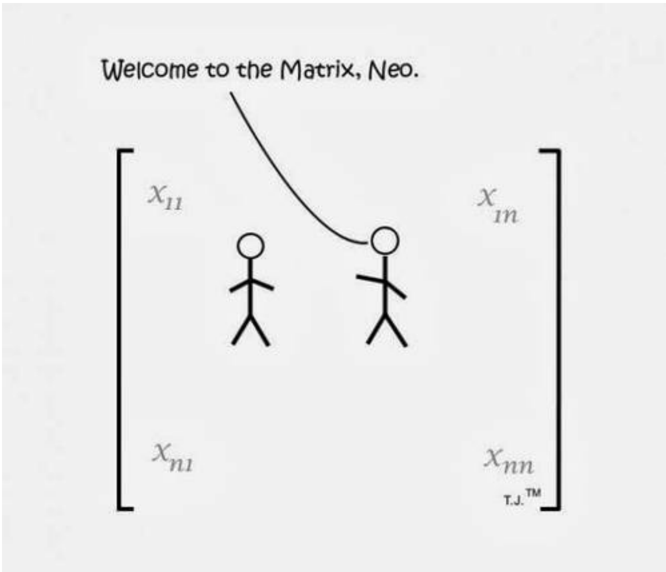
Chapitre 19
Matrices

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

11 février 2025



Le but de ce chapitre est d'introduire un outil fondamental de l'algèbre linéaire : les matrices. On commence simplement par les introduire sans trop voir le lien avec l'algèbre linéaire pour s'habituer à les manipuler. Puis dans le chapitre suivant, on fera le lien avec les espaces vectoriels.

> It is my experience that proofs involving matrices can be shortened by 50% if one throws the matrices out.
>
> *Emil Artin*

Table des matières

1 Matrice

1.1 Premières définitions et propriétés

Définition 1.1 (Matrice) :
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice de type (n,p), ou de taille $n \times p$, ou à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. C'est donc un élément de $\mathbb{K}^{np}$.

Une matrice A de taille $n \times p$ est notée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Si $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$, le terme $a_{i,j}$ d'indice (i,j) est appelé le coefficient de A d'indice (i,j). Il est positionné à l'unique croisement de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.

Exemple 1.1 :
Dans le cas de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, si on note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ ses coefficients, on a $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 2$, $a_{1,3} = 3$, $a_{2,1} = 4$, $a_{2,2} = 5$ etc jusqu'à $a_{3,3} = 9$. D'une façon général, $a_{i,j} = 3(i-1) + j$.

Remarque :
Par convention, le premier indice dans une matrice fait TOUJOURS référence à la ligne et le second à la colonne. Ce qui permet de s'y retrouver. On fera bien attention donc, lors de la description des coefficient d'une matrice, de donner d'abord les lignes et ensuite les colonnes. Si on donne les informations dans le sens inverse, on n'obtient pas la même matrice.

Définition 1.2 ($\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) :
Soit $n, p \geq 1$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 1.1 (Égalité) :
Soit $n, p \geq 1$.

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont égales si et seulement elles sont égales coefficients par coefficients.

Démonstration :
Ça vient de la définition d'une matrice qui est en fait un élément simplement de $\mathbb{K}^{np}$ et de l'égalité entre m-uplet. $\square$

Exemple 1.2 :
Donner la matrice $A \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ dont le coefficient $a_{i,j}$ est donné par la formule $a_{i,j} = \cos(2i\pi/j)$. Donner ensuite la matrice $B \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ dont les coefficients $b_{i,j}$ sont donné par $b_{i,j} = \cos(2j\pi/i)$.

Remarque :
Les matrices de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ sont les matrices de la formes (a) avec $a \in \mathbb{K}$. Elles ne sont composées que d'un seul coefficient. Il est habituel d'identifier (via un isomorphisme) $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ (au même titre que $\mathbb{K}_0[X]$ est identifié à $\mathbb{K}$). Ce que l'on fera si besoin. Même si, a strictement parlé, une matrice n'est pas un scalaire. Mais on oublie la distinction par soucis de praticité. Ce qui ne sera pas possible avec python par exemple.

Définition 1.3 (Matrice nulle) :
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. La matrice nulle de taille $n \times p$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont des zéros. On la note parfois $0_{n,p}$. Cette notation n'est pas canonique. Et on oubliera parfois les indices.

1.2 Lignes / Colonnes

Définition 1.4 (Matrices colonne) :
Soit $n \geq 1$. Les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

avec $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k \in \mathbb{K}$.

Remarque :
Il est fréquent d'identifier (via un isomorphisme qu'on explicitera) les matrices colonnes avec le n-uplet de $\mathbb{K}^n$ qui lui correspond (c'est ce qui est fait en SII, par exemple).

On a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Une fois les opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définies, on saura même que cette application est un isomorphisme.

Attention toutefois, un vecteur de $\mathbb{K}^n$ n'est PAS une matrice. Et inversement. Les pratiques de SII ne doivent en aucun cas être reproduite en mathématique. Les deux objets sont différents. C'est une grave erreur de compréhension de faire cet amalgame. Le but des prochains va précisément être d'expliciter le lien entre les matrices et l'algèbre linéaire et d'étudier le moyen d'écrire sous forme matricielle les vecteurs. Donc la confusion faite en SII entre vecteurs et matrices rend caduc le chapitre le plus important et le plus délicat d'algèbre linéaire de cette année. Il ne faut donc surtout pas le faire. Sans quoi, il est inutile de continuer à faire des maths.

Définition 1.5 (Matrices lignes) :
Soit $p \geq 1$. Les matrices de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_p \end{pmatrix}$$

avec $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$, $a_k \in \mathbb{K}$.

Remarque :
Attention à ne pas confondre l'écriture d'une matrice ligne avec un n-uplet. Il faut bien prendre garde

à laisser de la place entre les éléments de la matrice mais ne pas les séparer par des virgules. Sans quoi, ce n'est plus une matrice, mais un n-uplet. Autrement dit, $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \neq (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq \begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \end{pmatrix}$.

Définition 1.6 (Lignes et colonnes d'une matrice) :
Soit $n, p \geq 1$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- Pour $1 \leq j \leq p$, la matrice colonne $C_j(A) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définit par

$$C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

  est appelée la j-ème colonne de la matrice A.
- Pour $1 \leq i \leq n$, la matrice ligne $L_i(A) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ définit par

$$L_i(A) = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix}$$

  est appelée la i-ème ligne de la matrice A.

1.3 Matrices Carrés

Définition 1.7 (Matrice carré) :
Soit $n \geq 1$. Les matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont appelés matrices carrés de taille n (elles ont autant de lignes que de colonnes). On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices carré de taille n.

Exemple 1.3 :
Écrire de façon plus détaillée la matrice $A = (\max(i,j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1.8 (Matrice identité) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $I_n = \mathrm{diag}(1, \dots, 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale dont tous les termes diagonaux valent 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :
On a aussi $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

2 La $\mathbb{K}$-algèbre des matrices

2.1 Espace vectoriel

Définition 2.1 (Addition matricielle) :
Soit $n, p \geq 1$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & \dots & a_{2,p} + b_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \dots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}$$

C'est l'addition dans $\mathbb{K}^{np}$ écrit sous forme de tableau.

⚠ Attention !
On ne somme que des matrices de même types.

Exemple 2.1 :

Calculer les sommes des matrices suivantes lorsque c'est possible :

$$\begin{array}{rclcrcl} A & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & & B & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ C & = & \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -5 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & & D & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ E & = & \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & & F & = & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 2.2 (Multiplication par un scalaire) :
Soit $n, p \geq 1$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit le produit λA par $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \dots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque :
Ce sont les opérations définies sur $\mathbb{K}^{np}$ que l'on écrit sous forme de tableau. Mais ce sont les mêmes opérations.

Théorème 2.1 (Structure d'espace vectoriel) :
Soit $n, p \geq 1$.
$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est $\mathbb{K}$-ev d'élément neutre $0_{n,p}$.

Démonstration :
Il suffit de se rappeler que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{np}$. □

Exemple 2.2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer, pour $a, b, c \in \mathbb{K}$,

$$aA + bB - cI_2.$$

Définition 2.3 (Matrice élémentaire) :
Soit $n, p \geq 1$. $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall \ell \in \{1, \ldots, p\}$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice élémentaire dont tous les coefficient sont nuls sauf le coefficient d'indice (k, ℓ), *i.e.*

$$E_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\delta_{(k,\ell),(i,j)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \ell \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \quad k \end{array}$$

Théorème 2.2 (Base canonique et dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ [✓]) :
Soit $n, p \geq 1$.
La famille $\mathcal{B} = (E_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Et $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Remarque :
Grâce à la base canonique de $\mathbb{K}^q$, il n'y a rien à faire. Mais on va le refaire en utilisant les notations matricielles pour s'y habituer. Il faut savoir l'écrire avec des matrices.

Démonstration :
On va commencer par montrer que cette famille est libre.
Soit $(\lambda_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq p}} \in \mathbb{K}^{np}$ tel que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_{k,\ell} E_{k,\ell} = 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \ldots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \ldots & \lambda_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \ldots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} = 0 \\ \iff & \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \forall \ell \in \{1, \ldots, p\}, \lambda_{k,\ell} = 0 \end{aligned}$$

donc la famille est libre.

On vient de voir d'autre part que c'est une famille génératrice. Donc c'est une base.

Cette base est de cardinal np. Donc $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ La base canonique n'est pas complètement canonique. Il y a un forme d'incertitude dans le choix de l'ordre des vecteurs. Ce qui aura par la suite (dans le prochain chapitre) une très grande importance. Plus précisément, il est possible de les ordonner par lignes ou par colonnes. Ce qui donne deux bases distinctes. Autrement dit, on peut considérer la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, E_{2,2}, \dots, E_{2,n}, E_{3,1}, \dots, E_{n,n})$ ou encore $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{2,n}, E_{3,1}, \dots, E_{n,n})$.

2.2 Produit matriciel

2.2.1 Définition

Définition 2.4 (Produit matriciel) :
Soit $n, p, q \geq 1$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k})_{\substack{1\leq j\leq p\\ 1\leq k\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = A \times B = (c_{i,k})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq k\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, q\}, c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il faut bien prendre garde à la taille des matrices que l'on multiplie :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{n},\mathbf{p}}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{\mathbf{n},\mathbf{q}}(\mathbb{K})$$

Il faut que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égale au nombre de lignes de la matrice de droite dans le produit.

Remarque :
Pour simplifier un peu les choses, on peut disposer les matrices "en croix" ce qui permet de se simplifier la vie pour les calculs :

$$\begin{array}{ccc} & & \overbrace{\begin{pmatrix} & b_{1,k} & \\ & b_{2,k} & \\ & \vdots & \\ & b_{p,k} & \end{pmatrix}}^{q} \\ & & \downarrow \\ n\left\{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \\ & & & \end{pmatrix}\right. & \rightarrow & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & c_{i,k} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2.3 :

Calculer les produits $A \times B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Remarque :
Par soucis de simplicité de notations, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pourra nommer les coefficients de la matrice A sous la forme $[A]_{i,j}$. En particulier, pour un produit de matrices : $[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$. Toutefois, attention : cette notation n'est pas canonique. Mais elle est suffisamment explicite et pratique pour qu'elle puisse, *a priori*, être accepté sans trop de difficultés.

2.2.2 Propriété

Les propriétés vont être des propriétés générales, donc avec l'expression général des coefficients de la matrice produit. Ça va être moche.

⚠ **!!! ATTENTION !!!**

LE PRODUIT MATRICIEL N'EST PAS COMMUTATIF ! ! !

Exemple 2.4 (À GARDER EN TÊTE À TOUT MOMENT QUAND ON MANIPULE DES MATRICES) :

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MAIS} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.3 (Produit des matrices élémentaires [✓]) :
Soit $n, p, q \geq 1$. Alors $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall j, k \in \{1, \ldots, p\}$ et $\forall \ell \in \{1, \ldots, q\}$,

$$\underbrace{E_{i,j}}_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \times \underbrace{E_{k,\ell}}_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})} = \underbrace{\delta_{j,k} E_{i,\ell}}_{\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})}$$

Démonstration :
On a $E_{i,j} = (\delta_{a,i}\delta_{b,j})_{\substack{1 \leq a \leq n \\ 1 \leq b \leq p}}$ et $E_{k,\ell} = (\delta_{k,b}\delta_{\ell,c})_{\substack{1 \leq b \leq p \\ 1 \leq c \leq q}}$. Alors $E_{i,j}E_{k,\ell} = (e_{a,c})_{\substack{1 \leq a \leq n \\ 1 \leq c \leq q}}$ avec, $\forall (a, c) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, q\}$,

$$\begin{aligned} e_{a,c} = \sum_{b=1}^{p} \delta_{a,i}\delta_{b,j}\delta_{k,b}\delta_{\ell,c} &= \begin{cases} 2\delta_{a,i}\delta_{k,j}\delta_{\ell,c} & \text{si } k \neq j \\ \delta_{a,i}\delta_{\ell,c} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \delta_{a,i}\delta_{k,j}\delta_{\ell,c} \end{aligned}$$

D'un autre côté, les coefficients de la matrice $\delta_{j,k}E_{i,\ell} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ sont les $\delta_{j,k}\delta_{a,i}\delta_{c,\ell}$ pour $(a, c) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, q\}$. D'où l'égalité

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$$

□

Le cas le plus intéressant de cette proposition est lorsque $n = p = q$ (donc des matrices carrées). Mais on la trouve parfois sous cette forme en question de cours.

Proposition 2.4 (Produit par I_n) :
Soit $n, p \geq 1$. Alors

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ I_n A = A \quad \text{et} \quad AI_p = A$$

Remarque :
En particulier, on remarquera donc que pour $n = p$, donc pour les matrices carré,

$$AI_n = I_nA = A$$

Démonstration :
C'est, comme d'habitude, un jeu d'écriture un peu fastidieux. On peut soit le démontrer directement, en écrivant le produit matriciel, mais on va tâcher d'être un peu plus malin. On a déjà bien travaillé, on va essayer de s'en servir.

En premier lieu, observons que les produits matriciels sont bien définies.

On sait que les matrices élémentaires forment une base $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Et on a $I_n = \sum_{k=1}^n E_{k,k}$ et $I_p = \sum_{k=1}^p E_{k,k}$. Et on a également $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}E_{i,j}$. On en déduit donc

$$\begin{aligned}
I_nA &= \left(\sum_{k=1}^n E_{k,k}\right)\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p a_{i,j}E_{i,j}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p\sum_{k=1}^n a_{i,j}E_{k,k}E_{i,j}\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p\sum_{k=1}^n a_{i,j}\delta_{k,i}E_{k,j}\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^p a_{i,j}E_{i,j}\\
&= A
\end{aligned}$$

et la même chose de l'autre côté. □

⚠ **!!! ATTENTION !!!**

LE PRODUIT MATRICIEL N'EST PAS COMMUTATIF ! ! !

Exemple 2.5 (À GARDER EN TÊTE À TOUT MOMENT QUAND ON MANIPULE DES MATRICES) :

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MAIS} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.5 (Produit avec une matrice colonne ou ligne [✓]) :
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X = (x_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, alors $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur colonne qui est une combinaison linéaire des colonnes de A et YA est une matrice ligne qui est une combinaison linéaire des lignes de A, plus précisément

$$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j(A) \qquad \text{et} \qquad YA = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(A)$$

Démonstration :
On a $AX = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,

$$b_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

Donc

$$\begin{aligned}
AX &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} x_j a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} x_j a_{n,j} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{p} x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} && \text{par combi lin} \\
&= \sum_{j=1}^{p} x_j C_j(A) && \text{par def } C_j(A)
\end{aligned}$$

La démo est très similaire pour les lignes. □

Proposition 2.6 (Colonnes et lignes d'un produit de matrices) :
Soit $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et

$$\forall k \in \{1, \dots, q\},\ C_k(AB) = AC_k(B)$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ L_i(AB) = L_i(A)B$$

Démonstration :
On ne va traiter que le cas des colonnes, celui des lignes étant très similaires. On note, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{j,k})_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le k \le q}}$. Donc $AB = (c_{i,k})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le q}}$ avec $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall k \in \{1, \dots, q\}$,

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

Donc, $\forall k \in \{1, \dots, q\}$,

$$\begin{aligned}
C_k(AB) &= \begin{pmatrix} c_{1,k} \\ \vdots \\ c_{n,k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} b_{j,k} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} b_{j,k} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{p} b_{j,k} \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{p} b_{j,k} C_j(A) \\
&= AC_k(B) && \text{d'après la propriété précédente}
\end{aligned}$$

□

Ce résultat est surtout utile pour la manipulation de système linéaire et pour le lien entre les matrices et l'algèbre linéaire (voir prochain chapitre).

Proposition 2.7 (Associativité du produit matriciel) :
Soit $n, p, q, r \ge 1$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a

$$A(BC) = (AB)C$$

Démonstration :
On a $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{j,k})_{\substack{1\leq j\leq p\\1\leq k\leq q}}$, $C = (c_{k,\ell})_{\substack{1\leq k\leq q\\1\leq \ell\leq r}}$. Il faut déterminer les coefficients de tous les produits matriciels. On a $AB = (d_{i,k})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq k\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $BC = (e_{j,\ell})_{\substack{1\leq j\leq p\\1\leq \ell\leq r}} \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $(AB)C = (f_{i,\ell})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq \ell\leq r}} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $A(BC) = (g_{i,\ell})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq \ell\leq r}} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. avec, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,p\}$, $k \in \{1,\dots,q\}$, $\ell \in \{1,\dots,r\}$,

$$d_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k} \qquad e_{j,\ell} = \sum_{k=1}^{q} b_{j,k}c_{k,\ell}$$

et

$$\begin{aligned} f_{i,\ell} &= \sum_{k=1}^{q} d_{i,k}c_{k,\ell} \\ &= \sum_{k=1}^{q} c_{k,\ell} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,\ell} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_{i,\ell} &= \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}e_{j,\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \sum_{k=1}^{q} b_{j,k}c_{k,\ell} \\ &= \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,\ell} \end{aligned}$$

d'où l'égalité des coefficients et donc des matrices et donc l'associativité. □

Proposition 2.8 (Distributivité du produit matriciel) :
Soit $n, p, q \geq 1$. Alors

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (A+B)C = AC + BC$$

et

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ A(B+C) = AB + AC$$

Démonstration :
Là encore, il faut tout écrire. On se place dans le premier cas d'abord (l'expression de B va changer).

On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{j,k})_{\substack{1\leq j\leq p\\1\leq k\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On note enfin $(A+B)C = (d_{i,k})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq k\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec

$$\begin{aligned} d_{i,k} &= \sum_{j=1}^{p}(a_{i,j}+b_{i,j})c_{j,k} \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}c_{j,k} + \sum_{j=1}^{p} b_{i,j}c_{j,k} \end{aligned}$$

c'est donc la somme des coefficients de AC et de BC. $\square$

Proposition 2.9 :
Soit $n, p, q \geq 1$,

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

Démonstration :
Là encore, c'est un jeu d'écriture seulement. Encore une fois, c'est un bon entraînement de l'écrire. $\square$

Remarque :
Grâce à ce qu'on vient de faire, on peut donc définir une application

$$\begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array}$$

qui est bilinéaire, c'est à dire linéaire par rapport à chacune de ces variables.

Définition 2.5 (Matrices carrés commutatives) :
Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les produits AB et BA sont bien définies. On dit que A et B sont commutatives si $AB = BA$.

On rappelle (encore), que le produit matriciel n'est PAS commutatif. Ce n'est donc pas anodin de définir des matrices commutatives. Ce n'est pas le cas en général.

ATTENTION ! ! Des matrices commutatives sont forcément des matrices carrés de même taille. Obligatoirement. Puisqu'il faut que les deux produit dans les deux sens soient définis.

Théorème 2.10 (Structures algébriques) :
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Alors $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-ev et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (donc un $\mathbb{K}$-ev et un anneau).

2.2.3 Puissance d'une matrice

Dans cette partie, on fait des rappels sur le calculs dans un anneau, reformulé dans le cas particulier des matrices. Mais tout est déjà dit et donné dans le chapitre sur les anneaux.

Définition 2.6 (Puissance d'une matrice) :
Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit

$$A^m = \begin{cases} I_n & \text{si } m = 0 \\ \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{m} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

!!! ATTENTION !!!

La puissance d'une matrice n'a de sens que pour une matrice carré ! En effet, il faut que le produit $A \times A$ soit défini, ce qui veux dire que le nombre de ligne de A doit être égale au nombre de colonnes de A. Donc la matrice A doit être carré !

Exemple 2.6 :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.11 (Binôme de Newton [✓]) :
Soit $n \geq 1,\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **Si A et B commutent**, alors

$$\forall m \in \mathbb{N},\ (AB)^m = A^m B^m$$

$$\forall m \in \mathbb{N},\ (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

et

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ A^m - B^m = (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$$

!!! ATTENTION !!!

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

et

$$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + BA^2 + AB^2 + BAB + B^2A + B^3$$

qu'on ne peut pas écrire autrement EN GÉNÉRAL ! Sauf, bien sûr, si les matrices commutent. Mais, bien évidemment, ce ne sera pas toujours le cas.

Démonstration :
Voir la démo dans le chapitre sur les anneaux. C'est la même démo en faisant attention à bien mettre des matrices et aux définitions des opérations utilisées. □

Exemple 2.7 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^3 = 0$. Exprimer $(A + I_n)^p$ en fonction de p.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il n'y a pas de division matricielle (comme dans les polynômes). On ne peut donc pas écrire $\cancel{\sum_{k=0}^{n} A^k = \frac{I_n - A^{n+1}}{I_n - A}}$. Ça n'a pas de sens. Attention !

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention ! Il y a des diviseurs de 0 dans les matrices ! Autrement dit, ce n'est ABSOLUMENT pas parce que $AB = 0$ que forcément l'une des deux matrices est nulle. On a déjà vu des exemples de matrices non nulles dont le produit est nul. En voila un autre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Définition 2.7 (Évaluation d'un polynôme en une matrice) :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
On définit $\widetilde{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ avec $\widetilde{P}(A) = \lambda I_n$ si $P(X) = \lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 2.12 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto & \widetilde{P}(A) \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{K}$-ev vérifiant

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ \varphi_A(PQ) = \varphi_A(P)\varphi_A(Q) \quad \text{et} \quad \varphi_A(P \circ Q) = \varphi_{\widetilde{Q}(A)}(P)$$

Autrement dit, $\widetilde{PQ}(A) = \widetilde{P}(A)\widetilde{Q}(A)$ et $\widetilde{P \circ Q}(A) = \widetilde{P}(\widetilde{Q}(A))$.

Démonstration :
C'est essentiellement un jeu d'écriture. Mais c'est un très bon exercice. □

Proposition 2.13 (Commutativité de A et $\widetilde{P}(A)$) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Alors A et $\widetilde{P}(A)$ commutent.

Démonstration :
Par bilinéarité du produit matriciel, il suffit en fait de montrer que A et A^k commutent pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais c'est évident par associativité du produit matriciel. □

Remarque :
En particulier, pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\widetilde{P}(A)$ et $\widetilde{Q}(A)$ commutent également.

2.2.4 Matrices inversibles

Cette partie est majoritairement contenue dans le chapitre sur les anneaux. On va simplement rappeler et reformulé les propriétés du chapitre sur les anneaux dans le cas particulier des matrices. On rajoutera également quelques éléments spécifiques aux matrices.

Définition 2.8 (Matrice inversible (Rappel)) :
Soit $n \geq 1$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, on note A^{-1} la matrice B.

Exemple 2.8 :
La matrice I_n est inversible, bien sûr. Également les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ Seul les matrices carrés peuvent être inversibles ! Il faut pouvoir multiplier par la même matrice à droite et à gauche.

Proposition 2.14 (Unicité de l'inverse (Rappel)) :
Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors son inverse est unique.

Démonstration :
Voir la démo dans les anneaux. C'est la même. $\square$

Proposition 2.15 (Inverse d'un produit et inverse de l'inverse (Rappel) [✓]) :
Soit $n \geq 1$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration :
Voir les anneaux. $\square$

Définition 2.9 ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) :
Soit $n \geq 1$.
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il s'appelle le groupe linéaire d'ordre n.

Le résultat suivant est nouveau et spécifique aux matrices. Ce n'est pas vrai du tout dans un anneau général.

Théorème 2.16 (Inversible à droite ssi inversible à gauche ssi inversible [✓]) :
Soit $n \geq 1$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence

(i) A est inversible

(ii) A est inversible à droite, *i.e.* $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = I_n$.

(iii) A est inversible à gauche, *i.e.* $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $CA = I_n$.

Démonstration :
$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Par définition de l'inversibilité.

$\boxed{(i) \Rightarrow (iii)}$ Par définition de l'inversibilité.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(M) = MA$. On vérifier facilement que φ est une application linéaire. Si $M \in \ker \varphi$, alors $MA = 0$. Donc $MAB = M = 0$. Donc φ est injective. Mais comme c'est un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie, on en déduit, par caractérisation des automorphisme, que φ est un automorphisme. En particulier, φ est surjective. Donc $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $CA = I_n$.

On a alors $C = C \times I_n = C(AB) = (CA)B = B$. Donc A inversible et $A^{-1} = B$.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ On procède de la même manière en étudiant la fonction $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\psi(M) = AM$. □

Exemple 2.9 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 5A$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

2.2.5 Matrices particulière

Certains types de matrices qui vont suivre seront étudiés un peu plus en détails ultérieurement. Elles sont introduites immédiatement en partie à dessein d'avoir du vocabulaire pour pouvoir travailler plus efficacement sur les matrices (et ne pas être trop perturbé dans l'éventualité très probable qu'un tel mot apparaissent dans un sujet à un moment donné).

2.2.5.1 Matrices idempotente, nilpotente

Définition 2.10 (Matrice idempotente) :
Soit $n \geq 1$. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est idempotente si $A^2 = A$.

Exemple 2.10 :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Définition 2.11 (Matrice nilpotente) :
Soit $n \geq 1$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente, son indice de nilpotence est $p = \min\{k \in \mathbb{N}, A^k = 0\}$.

Exemple 2.11 :

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est une matrice nilpotente.

On note $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une expression simple de B^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

2.2.5.2 Matrices diagonales

Définition 2.12 (Diagonale) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle diagonale de A, la famille $(a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}) = (a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$. Les coefficients de la diagonale sont les coefficients diagonaux de A.

Exemple 2.12 :
Donner la diagonale de la matrice $A = (i - 2j + ij)_{1 \leq i,j \leq 5} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

Définition 2.13 (Matrice diagonale) :
Soit $n \geq 1$.

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si tous ses coefficients sont nuls sauf dans la diagonale, *i.e.* si $i \neq j \implies a_{i,j} = 0$.
- On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales.
- Pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale dont la

diagonale est la famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *i.e.* la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Les matrices diagonales de taille n sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients a_k ne sont pas forcément non nuls. Il faut juste n'avoir que des zéros en dehors de la diagonale. Mais il peut y en avoir aussi dessus.

Exemple 2.13 :

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Remarque :

En particulier, les matrices $0_{n,n}$ (que l'on note plus simplement 0_n), sont des matrices diagonales.

Proposition 2.17 (Produit matriciel et matrices diagonales [✓]) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit matriciel et commutatif (pour la multiplication matricielle).

Démonstration :
Il faut l'écrire. On a

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & & 0 \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

$\square$

Proposition 2.18 (Caractérisation des matrices diagonales inversibles [✓]) :
Soit $n \geq 1$ et

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

On a équivalence entre

1. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i \neq 0$

et dans ce cas

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

Démonstration :
Le sens indirecte est immédiat à partir du produit de deux matrices diagonales. Le sens directe est le plus dur. C'est un bon exercice. L'idée est d'écrire son inverse sous la forme $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, écrire le produit et faire ensuite l'égalité avec I_n. On en déduit alors ce qu'il faut. □

2.2.5.3 Matrices triangulaires

Définition 2.14 (Matrice triangulaire) :
Soit $n \geq 1$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si tous les coefficients en dessous de la diagonale sont nuls (resp. au-dessus de la diagonale), *i.e.* si $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i > j \implies a_{i,j} = 0$ (resp. $i < j \implies a_{i,j} = 0$).

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrice triangulaire supérieure et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ les matrices triangulaires inférieures.

Les matrices triangulaires supérieurs sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

et les matrices triangulaires inférieures sont de la formes

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On note ça aussi parfois sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

L'étoile doit être comprise comme un joker. On remplit les étoiles par n'importe quoi, par ce qu'on veut.

Proposition 2.19 ($\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par multiplication) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

1. $\forall A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$
2. $\forall A, B \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $AB \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Démonstration :
Là aussi c'est un jeu d'écriture. On a

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & & * \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & & * \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

et quelque chose de similaire pour les matrices inférieurs. □

Attention, les étoiles ne sont pas les mêmes. On met des étoiles pour dire "compléter par les machins adéquats". Et ce ne sont pas les même machins dans chacune des matrices. Mais les machins n'ont pas tellement d'importance. Ce qui nous intéresse ici, c'est la diagonale et ce qu'il y a dessous, c'est la forme générale de la matrice.

Proposition 2.20 :
Soit $n \geq 1$.

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$$

Démonstration :
Il suffit de l'écrire en utilisant la condition sur la nullité des coefficient donner dans la def de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. □

Remarque :
On utilise parfois un sous-ensemble $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires strictement supérieures, c'est à dire des matrices triangulaire supérieures dont la diagonale est nulle. Mais cet ensemble est beaucoup plus anecdotique. Bien sûr, on a la même version pour les matrices triangulaires strictement inférieures.

Proposition 2.21 (Caractérisation des matrices inversibles de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ [✓]) :
Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. On a équivalence entre

1. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. Les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

Et dans ce cas, $A^{-1} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

On a un résultat similaire pour les matrices triangulaire inférieurs.

2.2.5.4 Généralités sur ces ensembles

Proposition 2.22 (Structures) :
Soit $n \geq 1$.
$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbre de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ (*i.e.* ce sont des sev et des sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Démonstration :
Il suffit de le faire pour $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ puisque $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est l'intersection des deux. On ne va le faire que pour les matrices triangulaires supérieurs. L'autre se traite de la même manière.

Tout d'abord $0_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Soit $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} E_{i,j}$ et de même pour B. Donc

$$\begin{aligned}
\lambda A + \mu B &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) E_{i,j} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} + \mu b_{1,1} & \lambda a_{1,2} + \mu b_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} + \mu b_{1,n} \\ 0 & \lambda a_{2,2} + \mu b_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} + \mu b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda a_{n,n} + \mu b_{n,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Exemple 2.14 :
Montrer que

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ 2a+b & -a+2b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{K} \right\}$$

est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Déterminer la dimension de F.

Proposition 2.23 (Dimension de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ [✓]) :
On a

$$\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$$

et

$$\dim \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

$$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\{E_{i,j}, 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

□

Au passage,

$$\dim(\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

car

$$\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n)$$

2.2.5.5 Matrices par blocs

Définition 2.15 (Matrice par blocs) :
Soit $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq m$ et $q \leq n$.

On dit que $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est une matrice par blocs si on peut écrire M sous la forme

$$\begin{array}{cccc} & \overset{n}{\longleftrightarrow} & & \\ & \overset{q}{\leftrightarrow} \ \overset{n-q}{\leftrightarrow} & & \\ M = & \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) & \begin{array}{c} \updownarrow \ p \\ \updownarrow \ m-p \end{array} & \Big\updownarrow m \end{array}$$

où $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{m-p,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{m-p,n-q}(\mathbb{K})$.

Remarque :
Toute matrice, de n'importe quelle taille, peut être vu comme un matrice par bloc. Ce n'est qu'une façon de "découper" en blocs, c'est totalement artificielle.

Proposition 2.24 (Opération sur les matrices par blocs) :
Les opérations sur les matrices par blocs se font comme pour les opérations sur les matrices, sous réserve d'existences des opérations sous-jacentes :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M & N \\ O & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+M & B+N \\ C+O & D+P \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & N \\ O & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AM+BO & AN+BP \\ CM+DO & CN+DP \end{pmatrix}$$

Remarque :
Évidemment, les opérations sur les matrices par blocs se généralisent pour les des matrices écrites avec plus de 4 blocs.

En particulier, les matrices diagonales par blocs sont stables par produit matricielle à condition que les blocs diagonaux soient carrés, *i.e.* les matrices par blocs de même forme forment une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si tous les produits sont biens définis.

Exemple 2.15 :
Si $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ 3I_n & 4I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+2C & B+2D \\ 3A+4C & 3B+4D \end{pmatrix}$$

Exemple 2.16 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & 1 & -1 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Remarque :
Nous donnerons un sens tout particulier aux matrices par blocs dans le chapitre prochain sur les représentations matricielles.

2.3 Transposition

2.3.1 Généralités

Définition 2.16 (Transposition) :
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de la matrice A, notée ${}^tA$ ou A^T, la matrice ${}^tA = (a'_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $a'_{j,i} = a_{i,j}$.

Donc le coefficient de ${}^tA$ d'indice (j, i) est le coefficient de A d'indice (i, j). La matrice ${}^tA$ est donc obtenue en positionnant les coefficients de A symétriquement par rapport à la diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \implies {}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \cdots & a_{n,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{n,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & a_{3,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.17 :
Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

on a

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque :
Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une matrice colonne, alors ${}^tX$ est une matrice ligne. Et inversement. La transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Le prime dans la notation des coefficients de ${}^tA$ est INDISPENSABLE ! Il ne faut surtout pas l'oublier. Sans ça, on retombe presque sur la matrice A. Le problème vient du fait que les indices sont des variables muettes. $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ sont fondamentalement les mêmes éléments sans plus de précision.

Proposition 2.25 (La transposition est une involution [✓]) :
Soit $n, p \geq 1$.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ {}^t({}^tA) = A$$

Démonstration :
D'abord, on notera que ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et donc ${}^t({}^tA) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme A. C'est donc bien parti pour avoir l'égalité. Pour démontrer l'égalité, il suffit de l'écrire. □

Proposition 2.26 (Linéarité de la transposition [✓]) :
Soit $n, p \geq 1$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration :
Je vous laisse montrer la linéarité. Et pour la bijectivité, l'involution de la transposition nous donne que la composée de la transposition par elle même est égale à l'identité. D'où la bijectivité. □

Ce qu'il faut retenir, c'est que c'est bijectif et que ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.

Proposition 2.27 (Transposée et produit matriciel [✓]) :
Soit $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, Alors

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Démonstration :
Là encore, il faut l'écrire. On pose $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{j,k})_{\substack{1\le j\le p\\ 1\le k\le q}}$. On pose $AB = (c_{i,k})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le q}}$ avec $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, $c_{i,k} = \sum_{j=1}^p a_{i,j}b_{j,k}$. Donc ${}^t(AB) = (c'_{k,i})_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le i\le n}}$ avec $\forall (k,i) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$, $c'_{k,i} = c_{i,k}$.

On a également ${}^tA = (a'_{j,i})_{\substack{1\le j\le p\\ 1\le i\le n}}$ et ${}^tB = (b'_{k,j})_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le j\le p}}$ avec $\forall (j,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, $a'_{j,i} = a_{i,j}$ et $\forall (k,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$, $b'_{k,j} = b_{j,k}$, donc ${}^tB\,{}^tA = (d_{k,i})_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le i\le n}}$ avec $\forall (k,i) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$, $d_{k,i} = \sum_{j=1}^p b'_{k,j}a'_{j,i} = \sum_{j=1}^p b_{j,k}a_{i,j} = \sum_{j=1}^p a_{i,j}b_{j,k} = c_{i,k}$. Donc ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. □

Corollaire 2.28 (Transposée et inverse [✓]) :
Soit $n \geq 1$.

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) = {}^tA^{-1}$.

Démonstration :
On sait que $AA^{-1} = I_n$, donc en passant à la transposition, ${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tI_n = I_n$. Donc ${}^tA$ est inversible puisqu'elle a un inverse à droite et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. □

Exemple 2.18 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre l'équation ${}^tA = \lambda A$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

2.3.2 Matrices symétriques et matrices antisymétriques

Définition 2.17 (Matrices symétriques et matrices antisymétriques) :
Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est une matrice symétrique si $A = {}^tA$. On dit qu'elle est antisymétrique si ${}^tA = -A$.
- On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Exemple 2.19 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Remarque :
Les matrices (anti)symétriques sont forcément des matrices carrées. En effet, comme on doit avoir ${}^tA = \pm A$, ça oblige à ce que le nombre de lignes de ${}^tA$ à être égale au nombres de lignes de A. Donc le nombre de colonne de A doit être égale au nombres de ligne de A. Et donc A est carré.

Proposition 2.29 (Structure de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ [✓]) :
Soit $n \geq 1$.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont de la formes

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

et

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{i,i}, E_{i,j} + E_{j,i}, 1 \leq i < j \leq n)$$

□

Proposition 2.30 ($\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ [✓]) :
Soit $n \geq 1$
$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et les matrices de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont de la formes

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{1,n-1} & -a_{2,n-1} & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Démonstration :

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{i,j} - E_{j,i}, 1 \leq i < j \leq n)$$

□

Théorème 2.31 (Supplémentarité de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ [✓]) :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Démonstration :
Cette démo est classique.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. On a donc $A = {}^tA = -A$. Donc $A = 0$. Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$.

Soit maintenant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ et $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$. On a donc $M = A + S$. Et ${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$ par linéarité de la transposition. De même, ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$. Donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. On a donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

D'où la somme directe. □

On aurait pu aussi utiliser la caractérisation des sommes directes en dimension finie mais il est bon de connaître la décomposition d'une matrice dans cette somme directe.

2.4 Trace

La trace n'est pas officiellement au programme, mais elle est très utile, et est au programme de deuxième année et c'est un outil incontournable. Il n'est pas raisonnable de ne pas en parler. Et il y a beaucoup d'exercices qui l'utilisent. Donc autant vraiment parler plutôt que de faire semblant.

Définition 2.18 (Trace d'une matrice) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la trace d'un matrice comme la somme des éléments diagonaux, *i.e.*

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} a_{k,k}$$

Proposition 2.32 (Propriété algébrique de la trace [✓]) :
L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Démonstration :
C'est un jeu d'écriture. C'est un bon exercice de l'écrire. □

La trace est une application linéaire qu'on utilise régulièrement pour faire de l'algèbre linéaire. On peut souvent observer des propriétés intéressantes sur la trace d'un sous-ensemble de matrices. Ça fait parti des objets mathématiques àà avoir vu au moins une fois.

Exemple 2.20 :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X + \operatorname{tr}(X)A = B$.

Remarque :
On note que $\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(A) = 0$.

Exemple 2.21 :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer :

$$A = B \iff \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM).$$

Exemple 2.22 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer $A = 0 \iff \mathrm{tr}({}^tAA) = 0$.