Chapitre 19 - TD :
Matrices

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

11 février 2025

1 Coefficients

Exercice 1 :
Calculer les sommes des matrices suivantes, quand c'est possible :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+i & 1-2i \\ 2-i & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1+i & 2-3i & 1+i \\ 1-i & 1+2i & 2+i \\ 1+i & 2i & -i \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 3i & 2-i \\ 1+2i & -1-i \\ 1+i & -1-i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -1-i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$

Exercice 2 :
Pour les matrices suivantes, donner la taille des matrices A et B, et celles des produit AB et BA lorsque cela à un sens puis les calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i & 2-i \\ 1 & 1-i & -1 \\ 1+2i & -1 & -1+i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 1-i & i & 1+i \\ 1+i & -1-i & i \end{pmatrix}$

Exercice 3 ([✓]) :
Soit $n \geq 2$. On note $J = (1)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice Attila (qui n'est composé que de uns ....)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Exprimer le produit JAJ en fonction des coefficients de A. Calculer aussi J^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. On pose $A = J - I_n$. En calculer A^2, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2 Produit, Commutativité

Exercice 4 :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
$$AB = A + B$$
Montrer que A et B commutent.
Indic : *On pourra considérer les matrices* $I_n - A$ *et* $I_n - B$

Exercice 5 ([✓]) :
Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation
$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
puis l'équation
$$X^2 = I_2$$

Exercice 6 :
Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
Calculer $(LC)^k$ et $(CL)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 :
Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de la forme $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et en donner une base et sa dimension.
2. Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
3. Déterminer les inversibles de E.
4. Déterminer les diviseurs de 0 de E.

Exercice 8 ([✓]) :
Généralités sur les polynômes annulateurs.

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exists P \in \mathbb{K}_{n^2}[X]$, $P \neq 0$ tel que $\widetilde{P}(A) = 0$. En déduire que si A est inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A.
2. Inversement, existe-t-il $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\widetilde{P}(A) = A^{-1}$?

Exercice 9 ([✓]) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et A inversible.
Justifier que A^{-1} et B commutent.

Exercice 10 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer $I_n + A$ est inversible et calculer son inverse. Montrer de même que $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $I_n + P^{-1}AP$ est inversible.

Exercice 11 ([✓]) :**
Soit $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & DM - MD \end{array}$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et donner une base de $\ker(\varphi)$ et de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Exercice 12 :
Soit $p \in \mathbb{N}$ impair, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On considère l'équation $M^{p+1} - M^p = D$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si M est solution de l'équation, alors M commute avec D.
2. En déduire que M est diagonale.
3. Montrer que l'équation admet des solutions, si et seulement si, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_k \geq -\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p$.
4. Déterminer, dans ce cas, le nombre de solution de l'équation.

Exercice 13 (Racine de matrice [✓]) :
On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer les produits QAP et QBP.
3. Trouver des racines de A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *i.e.* donner des matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$. Y en a-t-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
4. Peut-on trouver des racines de B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 14 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que B est inversible si et seulement si A l'est.
2. Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 :
Soit $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. On suppose A, D, M inversible.

Exprimer M^{-1}.

3 Puissances de matrices

Exercice 16 :
Calculer A^n pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 17 :
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $B = A - I_3$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n.

Exercice 18 ([✓]) :
Calculer de deux manières différentes les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 ([✓]) :
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 ([✓]) :
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ tel que $A^2 + 2A - 3I_p = 0$.

1. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.
2. Calculer A^n en fonction de n, A et I_p.
3. Calculer A^{-n} de la même manière

Exercice 21 :
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose

$$A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leq k, \ell \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Calculer $A\overline{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 22 ([✓]) :
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A + I_3)^3$
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}

Exercice 23 :
Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ non nulles vérifiant

$$ABC = 0_n$$

Montrer qu'au moins deux des matrices A, B, C ne sont pas inversibles.

Exercice 24 :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\exists A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $M^k = \alpha^k A + \beta^k B$.
Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = \alpha^k A + \beta^k B$.

Exercice 25 :
Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A = U \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) U^{-1}$.
Montrer que $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = \widetilde{P}(A^3)$.

4 Transposée, Matrices symétriques, Matrices antisymétriques

Exercice 26 :
Donner les matrices transposée des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 :
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore symétrique.

Exercice 28 ([✓]) :
On appelle trace d'une matrice carrée la somme de ses éléments diagonaux. Donc si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la trace de A

est

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrer que tr est une forme linéaire.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que les traces de ${}^tAA$ et A^tA sont strictement positives.
4. Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$. Montrer que $\exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = \mathrm{tr}(AM)$.
5. Soit $f \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^*$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace. Autrement dit, on vient de montrer que $\{f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(BA)\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{tr})$.

Exercice 29 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer

$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ {}^tXAX = 0$$

Exercice 30 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 31 :

1. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $M^2 - \mathrm{tr}(M)M \in \mathrm{Vect}(I_2)$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $(AB - BA)^2 \in \mathrm{Vect}(I_2)$.

Exercice 32 (Construction matricielle de $\mathbb{C}$) :
On considère l'ensemble

$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que $\mathfrak{C}$ muni de l'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication matricielle est une algèbre commutative (donc l'addition doit être commutative, associative, avoir un élément neutre, symétrisable, distributif sur la multiplication, qui doit être également commutatif, avoir un élément neutre, symétrisable sur $\mathfrak{C} \setminus \{0\}$, associative)
2. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2.
3. On définit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathfrak{C} \\ z & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(z) & -\mathfrak{Im}(z) \\ \mathfrak{Im}(z) & \mathfrak{Re}(z) \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Montrer que f est injective
   (b) Montrer que f est surjective
   (c) Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $f(z + z') = f(z) + f(z')$

(d) Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $f(zz') = f(z)f(z')$
(e) Montrer que $f(1) = I_2$
(f) Si $z \neq 0$, que peut on dire de $f(1/z)$?
(g) Exprimer $f(\overline{z})$ en fonction de $f(z)$
(h) Que dire de $\det(f(z))$ pour z ?