Lycée Loges

DS 7
Concours Blanc

Simon Dauguet

simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 05 Mars 2025

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Le but de ce problème est d'étudier une fonction et ses dérivées successives.
On introduit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+x^2)}{x} \end{array}$$

Partie I : Début des prolongations

1. Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. Montrer que l'on peut étendre f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On appellera encore f la fonction après prolongement.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que f' est continue sur $\mathbb{R}^*$.
5. Étudier la convergence de f' en 0 et en déduire que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
6. À la fin de l'étude, nous pourrons montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En admettant que nous avons déjà montré qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II : Avec des suites

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in]0,1], \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{4} f(u_n).$$

7. On pose $g(t) = \ln(1+t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq g'(t) \leq 1$.

   (b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$\forall t > 0,\ \frac{1}{1+t} \leq \frac{\ln(1+t)}{t} \leq 1.$$

   (c) En déduire également que

$$\forall x > 0,\ \frac{x}{1+x^2} \leq f(x) \leq x.$$

   (d) Retrouver le fait que f est dérivable en 0.

8. Déduire de ce qui précède que $f(]0,1]) \subset]0,1]$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
9. Montrer aussi que $\forall t > 0$, $|f'(t)| \leq 3$.
10. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|u_n|$.
11. Montrer alors que $(u_n) \in \mathbb{N}$ converge et donner sa limite.

Partie III : Dérivation annexe

On définit la fonction γ par

$$\gamma\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

12. Montrer que $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
13. Calculer γ', γ'' et γ'''.
14. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\gamma^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) - 2(n+1)XP_n(X).$$

15. Expliciter P_0, P_1, P_2 et P_3.
16. Justifier l'unicité des polynômes P_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
17. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$.
18. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est pair ou impair, alors P' a la parité contraire.

    (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_{2n} est pair et P_{2n+1} est impair.
19. Supposons $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n}(a) = 0$.

    (a) Monter que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n}'(a) = 0$.

    (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n^{(k)}}(a) = 0$.

    (c) Aboutir à une contradiction et conclure.

Partie IV : Étude du cas $n = 1$

On introduit l'application φ définit par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P)(X) = (1+X^2)P'(X) - 4XP(X).$$

20. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
21. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $P \neq 0$.

    (a) Déterminer le degré de $(1+X^2)P'(X)$ et $4XP(X)$ en fonction du degré de P.

    (b) Déterminer le coefficient dominant de $(1+X^2)P'(X)$ et $4XP(X)$ en fonction du coefficient dominant de P et du degré de P.

    (c) En déduire que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X])$.

22. Calculer l'image par φ de la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
23. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
24. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 5$, $\exists! Q_n \in \mathbb{R}[X]$, $\exists!(a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{R}^4$ tels que $X^n = (1+X^2)^2 Q_n(X) + a_n X^3 + b_n X^2 + c_n X + d_n$.
25. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on a

$$\begin{array}{ll}
a_{2n} = 0 & a_{2n+1} = n(-1)^{n-1} \\
b_{2n} = n(-1)^{n-1} & b_{2n+1} = 0 \\
c_{2n} = 0 & c_{2n+1} = (n-1)(-1)^{n-1} \\
d_{2n} = (n-1)(-1)^{n-1} & d_{2n+1} = 0
\end{array}$$

Partie V : Lien entre les polynômes P_n et f

On introduit les fonctions :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$$

26. Justifier que g et h sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
27. Calculer $g^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
28. Calculer h' et en déduire les $h^{(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
29. Monter que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
30. Calculer f'' et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, et pour tout $x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} \widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)! x^{n-k} (1+x^2)^k} + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n}.$$