DS 7
Concours Blanc
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 05 Mars 2025

Correction :
On introduit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+x^2)}{x} \end{array}$$

Partie I : Début des prolongations

1. $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geq 1 > 0$. Donc, par composition, $x \mapsto \ln(1+x^2) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Finalement, par quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule par, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$.

2. L'application $t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur dérivable sur $]-1,+\infty[$. Elle est en particulier dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est 1. Donc $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$. Or $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc, par composition $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et donc, par produit de fonctions convergentes, $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} = x\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \times 1 = 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$..

On considère maintenant

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Alors $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. Par composition, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc, par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. Et

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}.$$

4. Par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. Et de même, $x \mapsto \frac{2}{1+x^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. Donc, par structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$, on a donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$.

5. Par dérivabilité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0, on a $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\frac{2}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$. Donc, par linéarité de la limite, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

On a donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \in \mathbb{R}$, donc, par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (aka théorème satanique), f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ (ATTENTION ! on rappelle que l'on ne peut pas prolonger les dérivées ! Même si l'énoncé est fait pour le suggéré).

Donc $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Et par ailleurs, $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f'(1)$, donc, par caractérisation de la continuité par les limites, f' est continue en 0. Donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Et donc, par définition $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

6. On suppose qu'on a montré que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors, par Taylor-Young, f admet un développement limité à tout ordre en 0 et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

D'autre part, en calculant les développements limités, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k} + o(x^{2n}).$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{k} + o(x^{2n-1}).$$

On en déduit donc, par unicité du développements limités,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} f^{(2k)}(0) = 0 \\ f^{(2k-1)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(2k-1)!}{k} \end{cases}$$

et $f(0) = 0$.

Partie II : Avec des suites

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in]0,1] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{4}f(u_n).$$

7. On pose $g(t) = \ln(1+t)$ pour tout $t \geq 0$.

(a) $g \in \mathcal{C}^{+\infty}(]-1,+\infty[,0)$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Et alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g'(t) = \frac{1}{1+t}$. Or $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $1+t \geq 1$, donc, par passage à l'inverse (et même par décroissance de la fonction inverse),

$$\forall t \geq 0,\ 0 < \frac{1}{1+t} = g'(t) \leq 1.$$

(b) Soit $t > 0$. g' est décroissante sur $[0,t]$, donc $\forall x \in [0,t]$, $g'(t) = \frac{1}{1+t} \leq g'(x) \leq 1$.
g étant dérivable sur $[0,t]$ et de dérivée bornée sur $[0,t]$, l'inégalité des accroissements finis, nous donne

$$\forall x,y \in [0,t],\ x \neq y,\ \frac{1}{1+t} \leq \frac{g(y)-g(x)}{y-x} \leq 1.$$

En particulier,

$$\frac{1}{1+t} \leq \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{\ln(1+t)}{t} \leq 1.$$

On vient donc de montrer que $\forall t > 0$, $\frac{1}{1+t} \leq \frac{\ln(1+t)}{t} \leq 1$.

(c) D'après la question précédente, on a

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \leq 1$$

Et donc,

$$\forall x > 0,\ \frac{x}{1+x^2} \leq f(x) \leq x.$$

(d) On a $\forall x > 0$, $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 1$. Or, par continuité $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, par théorème des gendarmes, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Et donc, par définition, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. Ce qui est cohérent avec ce qui a été prouvé en partie I.

8. D'après ce qui précède, on a $\forall x \in]0,1]$, $0 < \frac{x}{1+x^2} \leq f(x) \leq x \leq 1$. Donc $\forall x \in]0,1]$, $f(x) \in]0,1]$ et donc, par définition, $f(]0,1]) \subset]0,1]$. Donc $]0,1]$ est intervalle stable par f.

Or $u_0 \in]0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1. Donc elle est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.

9. On a vu que $\forall t \neq 0$, $f'(t) = \frac{2}{1+t^2} - \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}$. Donc,

$$\begin{aligned}\forall t > 0,\ |f'(t)| &= \left|\frac{2}{1+t^2} - \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\right| \\ &\leq \frac{2}{1+t^2} + \left|\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\right| && \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq 2+1 = 3 && \text{cf question 6}\end{aligned}$$

10. On vient de voir que $\forall t > 0$, $|f'(t)| \leq 3$. Or $f'(0) = 1 < 3$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f'(t)| \leq 3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc, par inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ |f(x) - f(y)| \leq 3|x-y|.$$

En particulier, pour $y = 0$, on a

$$\forall x \in]0,1],\ |f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq 3|x|.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}| = \frac{1}{4}|f(u_n)| \leq \frac{3}{4}|u_n|.$$

11. On a $|u_0| \leq (3/4)^0|u_0|$. Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq (3/4)^n|u_0|$. Alors $|u_{n+1}| \leq 3/4|u_n| \leq (3/4)^{n+1}|u_0|$.

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq (3/4)^n|u_0|$.

Or $3/4 \in]0,1[$, donc, par convergence des suites géométriques, $(3/4)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, par corollaire du théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Parti III : Dérivation annexe

On définit la fonction

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

12. En tant qu'inverse de fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

13. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

et enfin

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma'''(x) = \frac{12x(1+x^2)^3 - 12x(3x^2-1)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6} = \frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}.$$

14. On pose $P_0(X) = 1 \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\gamma(x) = \frac{\widetilde{P_0}(x)}{(1+x^2)^2}$.

Supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\gamma^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Comme $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on peut donc dériver $\gamma^{(n)}$ et alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma^{(n+1)}(x) &= \frac{\widetilde{P_n}'(x)(1+x^2)^{n+1} - 2(n+1)x(1+x^2)^n\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{\widetilde{P_n}'(x)(1+x^2) - 2(n+1)x\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}\end{aligned}$$

On pose alors $P_{n+1}(X) = P_n'(X)(1+X^2) - 2(n+1)XP_n(X)$. Alors $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma^{(n+1)}(x) = \frac{\widetilde{P_{n+1}}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}.$$

On vient donc de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\gamma^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$
avec
$$P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) - 2(n+1)XP_n(X).$$

15. D'après les calculs de γ, γ', γ'' et γ''', on a
$$P_0(X) = 1, \qquad P_1(X) = -2X, \qquad P_2(X) = 2(3X^2-1), \qquad P_3(X) = -24X(X^2-1).$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = \gamma^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{Q_n}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$
Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \neq 0$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P_n}(x) = \widetilde{Q_n}(x)$. Autrement dit, le polynôme $R_n = P_n - Q_n$ est constant égal à 0 (par linéarité de $P \mapsto \widetilde{P}$). Donc $P_n = Q_n$ et d'où l'unicité.

17. D'après la question précédente, on a $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$ pour $n \in \{0,1,2,3\}$.

Supposons que $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$. On a $P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) - 2(n+1)XP_n(X)$. On a donc $\deg(P_n') = n-1 \geq 0$. Et donc $\deg((1+X^2)P_n'(X)) = n+1$. De même, $\deg(XP_n(X)) = n+1$.

Mais
$$\operatorname{coeff\,dom}(2(n+1)XP_n(X)) = 2(n+1)\operatorname{coeff\,dom}(P_n(X)) = (-1)^n 2(n+1)(n+1)!$$
et
$$\operatorname{coeff\,dom}((1+X^2)P_n'(X)) = \operatorname{coeff\,dom}(P_n') = \deg(P_n)\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = n(-1)^n(n+1)!.$$
Donc le coefficient de P_{n+1} de X^{n+1} est $(-1)^n n(n+1)! - 2(n+1)(-1)^n(n+1)! = (-1)^n(n+1)!(n-2n-2) = (-1)^{n+1}(n+1)!(n+2) = (-1)^{n+1}(n+2)! \neq 0$.

Donc P_{n+1} est de degré $n+1$ (la plus grande puissance de X qui apparaît est X^{n+1} avec un coefficient non nul) et donc $\operatorname{coeff\,dom}(P_{n+1}) = (-1)^{n+1}(n+2)!$.

Finalement, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$.

18. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons que P soit pair. Alors $P(-X) = P(X)$ et dérivant, on obtient $-P'(-X) = P'(X)$ et donc P' est impair. Si on suppose que P est impair, on a donc $P(-X) = -P(X)$ et en dérivant de nouveau, $-P'(-X) = -P'(X)$, autrement dit $P'(-X) = P'(X)$. Donc P' est pair.

Finalement, on vient de montrer que si P est pair ou impair, alors P' a la parité contraire.

(b) D'après les calculs, on a $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = -2X$. Donc P_0 est pair et P_1 est impair.

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que P_{2n} pair et P_{2n+1} impair. Par définition, on a $P_{2n+2}(X) = (1+X^2)P_{2n+1}'(X) - 2(2n+1)XP_{2n+1}(X)$. Donc
$$\begin{aligned}
P_{2n+2}(-X) &= (1+X^2)P_{2n+1}'(-X) + 2(2n+1)XP_{2n+1}(-X) \\
&= (1+X^2)P_{2n+1}'(X) - 2(2n+1)XP_{2n+1}(X) && \text{car } P_{2n+1} \text{ impair} \\
&= P_{2n+2}(X)
\end{aligned}$$
Donc P_{2n+2} est pair. Et de même,
$$\begin{aligned}
P_{2n+3}(-X) &= (1+(-X)^2)P_{2n+2}'(-X) - 2(2n+3)(-X)P_{2n+2}(-X) && \text{def } P_{2n+3} \\
&= -(1+X^2)P_{2n+2}'(X) + 2(2n+3)XP_{2n+2}(X) && P_{2n+2} \text{ pair} \\
&= -((1+X^2)P_{2n+2}'(X) - 2(2n+3)XP_{2n+2}(X)) \\
&= -P_{2n+3}(X)
\end{aligned}$$
et donc P_{2n+3} est impair.

Finalement, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, P_{2n} est pair et P_{2n+1} est impair.

19. Supposons $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n}(a) = 0$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a $P_{n+1}(X) = (1 + X^2)P_n'(X) - 2(n+1)XP_n(X)$. Donc, par linéarité de l'évaluation, $\widetilde{P_{n+1}}(a) = (1+a^2)\widetilde{P_n'}(a) - 2(n+1)a\widetilde{P_n}(a)$. Or, par hypothèse, $\widetilde{P_{n+1}}(a) = 0 = \widetilde{P_n}(a)$, donc $(1+a^2)\widetilde{P_n'}(a) = 0$. Mais $a \in \mathbb{R}$, donc $1 + a^2 \neq 0$ et donc $\widetilde{P_n'}(a) = 0$.

Or n est un entier quelconque, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n'}(a) = 0$.

(b) On va démontrer ce résultat par récurrence double. On sait déjà par hypothèse que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n^{(0)}}(a) = \widetilde{P_n}(a) = 0$. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n'}(a) = 0$.

Supposons maintenant $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n^{(k)}}(a) = 0 = \widetilde{P_n^{(k+1)}}(a)$.

On pose $Q(X) = 1 + X^2$ et $R(X) = X$. Alors, par définition, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(X) = Q(X)P_n'(X) - 2(n+1)R(X)P_n(X)$. Alors, par la formule de Leibniz et linéarité de la dérivation, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}^{(k+1)}(X) &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} Q^{(j)}(X) P_n^{(k+1-j+1)}(X) - 2(n+1) \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} R^{(j)}(X) P_n^{(k+1-j)}(X) \\
&= Q(X)P_n^{(k+2)}(X) + (k+1)Q'(X)P_n^{(k+1)}(X) + \frac{(k+1)k}{2} Q''(X)P_n^{(k)}(X) \\
&\qquad - 2(n+1)\left(R(X)P_n^{(k+1)}(X) + (k+1)R'(X)P_n^{(k)}(X)\right) \\
&= (1+X^2)P_n^{(k+2)}(X) + 2(k+1)XP_n^{(k+1)}(X) + k(k+1)P_n^{(k)}(X) \\
&\qquad - 2(n+1)\left(XP_n^{(k+1)}(X) + (k+1)P_n^{(k)}(X)\right) \\
&= (1+X^2)P_n^{(k+2)}(X) + 2(k-n)XP_n^{(k+1)}(X) + (k+1)(k-2n-2)P_n^{(k)}(X)
\end{aligned}
$$

Donc, par linéarité de l'évaluation et par hypothèse de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \widetilde{P_{n+1}^{(k+1)}}(a) \\
&= (1+a^2)\widetilde{P_n^{(k+2)}}(a) + 2(k-n)\widetilde{P_n^{(k+1)}}(a) + (k+1)(k-2n-2)\widetilde{P_n^{(k)}}(a) \\
&= (1+a^2)\widetilde{P_n^{(k+2)}}(a).
\end{aligned}
$$

Or, comme $a \in \mathbb{R}$, on a $1 + a^2$ et donc on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n^{(k+2)}}(a) = 0$.

Finalement, par principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n^{(k)}}(a) = 0$.

(c) En utilisant la formule de Taylor et la question précédente, on a

$$
\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = 0.
$$

Donc tous les polynômes de la suite sont nuls. Or a monté que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n \geq 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \neq 0$. Donc ☠. Ou alors il suffit de regarder les 4 premiers polynômes calculés.

Donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P_n}(a) \neq 0$. Autrement dit, tous les polynômes de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas avoir de racine en commun.

Partie IV : Étude du cas $n = 1$

On introduit la fonction φ définie par

$$
\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P)(X) = (1+X^2)P'(X) - 4XP(X).
$$

20. La dérivation est linéaire et le produit polynomial est bilinéaire, donc $P \mapsto (1+X^2)P(X)$ est linéaire. Donc $P \mapsto (1+X^2)P'(X)$ est linéaire par composition. De même, $P \mapsto 4XP(X)$ est linéaire. Et donc φ est linéaire en tant que combinaison linéaire d'applications linéaires.

Sinon, en utilisant la définition : Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P+\mu Q)(X) &= (1+X^2)(\lambda P+\mu Q)'(X) - 4X(\lambda P+\mu Q)(X) \\
&\qquad \text{def } \varphi \\
&= \lambda(1+X^2)P'(X) + \mu(1+X^2)Q'(X) - \lambda 4XP(X) - 4\mu XQ(X) \\
&\qquad \text{linéarité dérivation} \\
&= \lambda((1+X^2)P'(X) - 4XP(X)) + \mu((1+X^2)Q'(X) - 4XQ(X)) \\
&\qquad \text{associativité, commutativité de } + \\
&= \lambda\varphi(P)(X) + \mu\varphi(Q)(X)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, dans la mesure où $\mathbb{R}[X]$ est stable par produit polynomial et combinaisons linéaires, on a donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$ si $P \in \mathbb{R}[X]$. Donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

21. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $P \neq 0$.

(a) Par degré d'un produit, $\deg(4XP(X)) = \deg(P) + 1$.
Et $\deg(P') = -\infty$ si $\deg(P) \leq 0$ et $\deg(P') = \deg(P) - 1$ sur $\deg(P) \geq 1$. Donc

$$\deg((1+X^2)P'(X)) = \begin{cases} -\infty & \deg(P) \leq 0 \\ 2 + \deg(P) - 1 = \deg(P) + 1 & \deg(P) \geq 1 \end{cases}$$

(b) On a alors également $\operatorname{coeff\,dom}(4XP(X)) = 4 \operatorname{coeff\,dom}(P)$ et

$$\begin{cases} (1+X^2)P'(X) = 0 & \deg(P) = 0 \\ \operatorname{coeff\,dom}((1+X^2)P'(X)) = \deg(P)\operatorname{coeff\,dom}(P) & \deg(P) \geq 1 \end{cases}$$

(c) Par degré d'une somme, on a $\deg(\varphi(P)) \leq \max(\deg((1+X^2)P'(X)), \deg(4XP(X))) \leq \deg(P) + 1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\operatorname{coeff}_{\deg(P)+1}(\varphi(P)) &= \begin{cases} -4\operatorname{coeff\,dom}(P) & \deg(P) \leq 0 \\ \deg(P)\operatorname{coeff\,dom}(P) - 4\operatorname{coeff\,dom}(P) & \deg(P) \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -4\operatorname{coeff\,dom}(P) & \deg(P) \leq 0 \\ \operatorname{coeff\,dom}(P)(\deg(P) - 4) & \deg(P) \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P) + 1$, on en déduit

$$\begin{cases} \deg(\varphi(P)) = \deg(P) + 1 & \text{si } \deg(P) \neq 4 \\ \deg(\varphi(P)) \leq \deg(P) & \text{si } \deg(P) = 4 \end{cases}$$

Mais comme $\deg(P) \leq 4$ et $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P) + 1$, on en déduit alors

$$\begin{cases} \deg(\varphi(P)) = \deg(P) + 1 \leq 4 & \text{si } \deg(P) \leq 3 \\ \deg(\varphi(P)) \leq \deg(P) = 4 & \text{si } \deg(P) = 4 \end{cases}$$

Donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_4[X]$.

On a montré plus haut que φ est linéaire et on vient de montrer que $\varphi(\mathbb{R}_4[X]) \subset \mathbb{R}_4[X]$. Donc par définition, $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X])$.

22. On calcul l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$\varphi(1) = -4X \qquad \begin{aligned} \varphi(X) &= (1+X^2) - 4X^2 \\ &= 1 - 3X^2 \end{aligned}$$

$$\varphi(X^2) = 2X(1+X^2) - 4X^3 \qquad \varphi(X^3) = 3X^2(1+X^2) - 4X^4$$

$$= 2X - 2X^3 \qquad\qquad\qquad\qquad = 3X^2 - X^4$$

$$\begin{aligned}\varphi(X^4) &= 4X^3(1+X^2) - 4X^5\\ &= 4X^3\end{aligned}$$

23. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\varphi) &= \{\varphi(P),\ P \in \mathbb{R}_4[X]\}\\ &= \varphi(\mathbb{R}_4[X])\\ &= \varphi(\mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3, X^4))\\ &= \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3), \varphi(X^4))\\ &= \mathrm{Vect}(-4X, 1-3X^2, 2X-3X^3, 3X^2-X^4, 4X^3)\\ &= \mathrm{Vect}(X, 1-3X^2, X^3, 3X^2-X^4) && \text{élimination dans une famille génératrice}\end{aligned}$$

On remarque alors que la famille $(X, 1-3X^2, X^3, 3X^2-X^4)$ est une famille de polynôme échelonnée en degré ne contenant le polynôme nul, donc cette famille est libre. Or elle engendra $\mathrm{Im}(\varphi)$ par définition, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

On en déduit alors que $\mathrm{rg}(\varphi) = 4$ et comme $\dim(\mathbb{R}_4[X]) = 5$, le théorème du rang nous donne $\dim(\ker(\varphi)) = 5 - 4 = 1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Alors $\exists a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ en utilisant la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. On a

$$\begin{aligned}P \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0\\ &\iff (1+X^2)P'(X) - 4XP(X) = 0\\ &\iff (1+X^2)(4aX^3 + 3bX^2 + 2cX + d) - 4X(aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e) = 0\\ &\iff -bX^4 + (4a-2c)X^3 + (d+3b-4d)X^2 + (2c-4e)X + d = 0\\ &\iff \begin{cases} -b = 0\\ 2(2a-c) = 0\\ d+3b-4d = 0\\ 2(c-2e) = 0\\ d = 0\end{cases} && \text{liberté base canonique } \mathbb{R}_4[X]\\ &\iff \begin{cases} b = 0\\ d = 0\\ 2a-c = 0\\ c-2e = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} b = 0\\ d = 0\\ c = 2a\\ c = 2e\end{cases}\end{aligned}$$

D'où

$$\ker(\varphi) = \{eX^4 + 2eX^2 + e, e \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^4 + 2X^2 + 1).$$

Or $\dim(\ker(\varphi)) = 1$ par théorème du rang, donc $(3X^4 + 2X^2 + 1)$ est une base de $\ker(\varphi)$.

24. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 5$. Par division euclidienne par $(1+X^2)^2$, $\exists!(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^n = (1+X^2)^2Q_n(X) + R_n(X)$ avec $\deg(R_n) < \deg((1+X^2)^2) = 4$. Donc $\mathbb{R}_n \in \mathbb{R}_3[X]$. Or $(1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc $\exists!(a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{R}^4$ tel que $R_n(X) = a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX + d_n$.

Finalement, $\exists! Q_n \in \mathbb{R}[X]$, $\exists!(a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{R}^4$ tels que $X^n = (1+X^2)^2Q_n(X) + a_nX^3 + b_nX^2 + c_nX + d_n$.

25. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 5$. On a $(1+X^2)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$. Donc i et $-i$ sont racines doubles de $(1+X^2)^2$. Donc ce sont aussi des racines de la dérivée par caractérisation des racines multiples par les dérivées.

Or, par dérivation, on a $nX^{n-1} = 4X(1+X^2)Q_n(X) + (1+X^2)^2 Q_n'(X) + 3a_nX^2 + 2b_nX + c_n$. Donc on en déduit

$$\begin{cases} i^n = -ia_n - b_n + ic_n + d_n \\ (-i)^n = ia_n - b_n - ic_n + d_n \\ ni^{n-1} = -3a_n + 2ib_n + c_n \\ n(-i)^{n-1} = -3a_n - 2ib_n + c_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} i^n(1+(-1)^n) = -2b_n + 2d_n \\ i^n(1-(-1)^n) = -2ia_n + 2ic_n \\ ni^{n-1}(1+(-1)^{n-1}) = -6a_n + 2c_n \\ ni^{n-1}(1-(-1)^{n-1}) = 4ib_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} i^n(1+(-1)^n) = -2b_n + 2d_n \\ i^{n-1}(1-(-1)^n) = -2a_n + 2c_n \\ ni^{n-1}(1+(-1)^{n-1}) = -6a_n + 2c_n \\ ni^{n-2}(1-(-1)^{n-1}) = 4b_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4b_n = ni^{n-2}(1-(-1)^{n-1}) \\ 4d_n = i^{n-2}(-2-2(-1)^n + n - n(-1)^{n-1}) = (n-2)i^{n-2}(1-(-1)^{n-1}) \\ 4a_n = i^{n-1}(1-(-1)^n - n - n(-1)^{n-1}) = -(n-1)i^{n-1}(1-(-1)^n) \\ 4c_n = i^{n-1}(3-3(-1)^n - n - n(-1)^{n-1}) = -(n-3)i^{n-1}(1-(-1)^n) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = -\frac{1}{4}(n-1)i^{n-1}(1-(-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{4}ni^{n-2}(1-(-1)n-1) \\ c_n = -\frac{1}{4}(n-3)i^{n-1}(1-(-1)^n) \\ d_n = \frac{1}{4}(n-2)i^{n-2}(1-(-1)^{n-1}) \end{cases}$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{array}{llll} a_{2n} & = 0 & a_{2n+1} & = n(-1)^{n-1} \\ b_{2n} & = n(-1)^{n-1} & b_{2n+1} & = 0 \\ c_{2n} & = 0 & c_{2n+1} & = (n-1)(-1)^{n-1} \\ d_{2n} & = (n-1)(-1)^{n-1} & d_{2n+1} & = 0 \end{array}$$

Lien entre les polynômes P_n et f

On introduit les fonctions

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$$

26. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que fraction rationnelle et $x \mapsto 1+x^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $[1,+\infty[$ et $\ln \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Donc par composition, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

27. Comme $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, on peut la dériver autant de fois que désirer et

$$\forall x \neq 0,\ g(x) = \frac{1}{x}, \qquad g'(x) = \frac{-1}{x^2}, \qquad g''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Supposons que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \neq 0,\ g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$. Alors $\forall x \neq 0,\ g^{(k+1)}(x) = \frac{-(-1)^k k!(k+1)}{x^{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}}$. Donc, par principe de récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \neq 0,\ g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$

28. h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier dérivable et

$$\forall x > 0,\ h'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = \alpha(x)\gamma(x)$$

où $\alpha : x \mapsto 2x$ et $\gamma : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ introduite dans la partie III. On a $\alpha, \gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc, par Leibniz,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ h^{(k+1)}(x) = (h')^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{(i)}(x)\gamma^{(k-i)}(x).$$

Or, d'après la question 13,

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \gamma^{(i)}(x) = \frac{\widetilde{P_i}(x)}{(1+x^2)^{i+1}}$$

et

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha^{(i)}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } i = 0 \\ 2 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ h^{(k+1)}(x) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{(i)}(x)\gamma^{(k-i)}(x) \\ &= \alpha(x)\gamma^{(k)}(x) + k\alpha'(x)\gamma^{(k-1)}(x) \\ &= \frac{2x\widetilde{P_k}(x)}{(1+x^2)^{k+1}} + \frac{2k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(1+x^2)^k} \end{aligned}$$

29. Par définition, on a $f = gh$ et $g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Donc, par produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on a bien $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
30. On a déjà calculé à la question 3 que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}.$$

Donc,

$$\forall x > 0,\ f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{x(1+x^2)} + \frac{2\ln(1+x^2)}{x^3}.$$

Enfin, en utilisant la formule de Leibniz et les questions précédentes pour les calculs des dérivées dans la formule de Leibniz, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= h(x)g^{(n)}(x) + nh'(x)g^{(n-1)}(x) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!x}{x^n(1+x^2)} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} h^{(k+1)}(x)g^{(n-k-1)}(x) \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} \\ &\qquad + 2\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} \left(\frac{x\widetilde{P_k}(x)}{(1+x^2)^{k+1}} + \frac{k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(1+x^2)^k} \right) \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!\widetilde{P_k}(x)}{(x^{n-k-1}(1+x^2)^{k+1}} \\ &\qquad + 2\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{x^{n-k}(1+x^2)^{n-k-1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}\widetilde{P_k}(x)}{(k+1)!x^{n-k-1}(1+x^2)^{k+1}} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^{k}} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + 2n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{k!x^{n-k}(1+x^2)^{k}} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^{k}} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + \frac{2n!(-1)^{n-2}\widetilde{P_0}(x)}{2!x^{n-1}(1+x^2)} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{x^{n-k}(1+x^2)^{k}} \left(\frac{1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!}\right) + \frac{2n!\widetilde{P_{n-1}}(x)}{n!(1+x^2)^n} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + \frac{n!(-1)^n}{x^{n-1}(1+x^2)} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{k!x^{n-k}(1+x^2)^{k}} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + \frac{(-1)^n n!}{x^{n-1}(1+x^2)} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^{k}} + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + 2n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^{k}} + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^{k}} + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n}
\end{aligned}
$$

On pourra remarquer que cette formule est encore vraie pour $n = 1$ si l'on prend en compte la convention que la somme est nulle puisque $n - 1 < 1$; et cette formule est encore vraie pour $n = 0$ avec la même convention et en rajoutant $P_{-1}(X) = 0$.

$\square$