NOM :
Prénom :

Mardi 11 Mars 2025

Interrogation 19

Analyse Asymptotiques - DL

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Formule de Taylor-Young.
Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + +o((x-a)^n).$$

2. DL et dérivés.
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

et si f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$, alors

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} (x-a)^k + o((x-a)^{n-1}).$$

3. Caractérisation de la continuité et de la dérivabilité par les DL.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est continue en a ssi f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ de la forme $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + o(1)$. Et f est dérivable en a ssi f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \kappa(x-a) + o(x-a)$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Et dans ce cas, $f'(a) = \kappa$.

4. DL et primitives.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Si f admet une primitive F sur I et si f admet une $\mathrm{DL}_n(a)$ de la forme

$$f(a) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ et

$$F(x) \underset{x \to a}{=} F(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}).$$

5. $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $\sin$.

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

6. $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\exp$

$$e^x \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

7. $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1-x)$

$$\ln(1-x) \underset{x \to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

8. $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $\arctan$.

$$\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Exercice 2 :
Calculer le $\mathrm{DL}_2(2)$ de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x-1)}$.

Il suffit de faire d'abord un changement de variable : on pose $h = x - 2 \xrightarrow[x\to 2]{} 0$. Alors

$$\ln(1-x) = \ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)$$

et

$$\sin(\pi x) = \sin(2\pi + h\pi) = \sin(\pi h) \underset{h\to 0}{=} \pi h - \frac{\pi^3}{6}h^3 + o(h^3).$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\pi x)}{\ln(1-x)} &= \frac{\sin(\pi h)}{\ln(1+h)} && x = 2+h \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\pi h - \frac{\pi^3}{6}h^3 + o(h^3)}{h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2)\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h^2 + o(h^2)\right)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2)\right)\left(1 + \left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h^2\right) + \left(\frac{1}{2}h\right)^2 + o(h^2)\right) && \frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h^2 + o(h^2) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{12}h^2 + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \pi + \frac{\pi}{2}h - \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi^3}{6}\right)h^2 + o(h^2) \\
&\underset{h\to 0}{=} \pi + \frac{\pi}{2}h - \frac{\pi(2\pi^2+1)}{12}h^2 + o(h^2) \\
&\underset{x\to 2}{=} \pi + \frac{\pi}{2}(x-2) + \frac{\pi(2\pi^2+1)}{12}(x-2)^2 + o((x-2)^2)
\end{aligned}$$