NOM :
Prénom :

Mardi 11 Février 2025

Lycée Loges

Interrogation 18

Fractions Rationnelles

Correction

Exercice 1 :
Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X^5+5x^4+2X^3-4X^2-X-3}{X^5+X^4-X-1}$.

1ère méthode : On commence par noter que

$$\begin{aligned}
F(X) &= \frac{(X-1)(X^4+6X^3+8X^2+4X+3)}{(X-1)(X^4+2X^3+2X^2+2X+1)} \\
&= \frac{X^4+6X^3+8X^2+4X+3}{X^4+2X^3+2X^2+2X+1} \\
&= \frac{X^4+2X^3+2X^2+2X+1+(4X^3+6X^2+2X+2)}{(X+1)(X^3+X^2+X+1)} \\
&= 1+\frac{4X^3+6X^2+2X+2}{(X+1)^2(X^2+1)}
\end{aligned}$$

Donc, par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, $\exists!(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$F(X) = 1+\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{cX+d}{X^2+1}.$$

Puis,

$$b = \widetilde{(X+1)^2 F}(-1) = \frac{-4+6-2+2}{1+1} = 1.$$

Et

$$x(\widetilde{F}(x)-1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a+c \qquad x(\widetilde{F}(x)-1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 4.$$

donc, par unicité de la limite, $a+c=4$.

Puis $\widetilde{F}(0) = 1+a+b+d = 1+2$. Donc $a+b+d=2$. Donc $a+d=1$.

Et $\widetilde{F}(1) = 1+\frac{14}{8} = 1+a/2+b/4+\frac{c+d}{2}$. Donc $2(a+c+d)+b=7$. Donc $a+c+d=3$.

On a donc le système

$$\begin{cases} a+d=1 \\ a+c=4 \\ a+c+d=3 \end{cases} \iff \begin{cases} a+d=1 \\ a+c=4 \\ c=2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=-1 \\ a=2 \\ c=2 \end{cases}$$

Donc

$$F(X) = 1+\frac{2}{X+1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{2X-1}{X^2+1}.$$

2eme méthode : On repart de

$$F(X) = 1+\frac{4X^3+6X^2+2X+2}{(X+1)^2(X^2+1)}$$

Par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, $\exists!(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tel que

$$F(X) = 1+\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{X-i}+\frac{d}{X+i}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
b &= \widetilde{(X+1)^2F}(-1) = \frac{-4+6-2+2}{1+1} = 1 \\
c &= \widetilde{(X-i)F}(i) = \frac{-4i-6+2i+2}{(i+1)^2(i+i)} = \frac{-4-2i}{(2i)^2} = 1+i/2 \\
d &= \widetilde{(X+i)F}(-i) = \frac{4i-6-2i+2}{(1-i)^3(-i-i)} = 1-i/2
\end{aligned}$$

Puis, $1+a+b-c/i+d/i = \widetilde{F}(0) = 1+2$. Donc $a=2$. Et donc

$$\begin{aligned}
F(X) &= 1 + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1+i/2}{X-i} + \frac{1-i/2}{X+i} \\
&= 1 + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{(1+i/2)(X+i)+(1-i/2)(X-i)}{X^2+1} \\
&= 1 + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{2X-1}{X^2+1}
\end{aligned}$$