# DS 8
# Polynômes - DL

Simon Dauguet
*simon.dauguet@gmail.com*

Mercredi 12 Mars 2025

*Le devoir dure 4h.*

*La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.*

*Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.*

*La calculatrice n'est pas autorisée.*

*Le sujet comporte 3 pages.*

**Problème 1 (Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce) :**
On définit la suite de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définis par

$$\begin{cases} U_0(X) = 1 \\ U_1(X) = 2X \\ \forall n \geq 0,\ U_{n+2}(X) = 2XU_{n+1}(X) - U_n(X). \end{cases}$$

Cette suite de polynômes s'appelle la suite de polynôme de Tchebychev de deuxième espèce.

**Partie 1 : Généralités sur les polynômes $U_n$**

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall a \in \mathbb{R}$ tels que $\sin((n+1)a) = \sin(a)\widetilde{P_n}(\cos(a))$.
2. Montrer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = U_n$.
4. Calculer $U_2$, $U_3$, $U_4$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(U_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(U_n) = 2^n$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathbb{Z}[X]$.
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n$ a la parité de $n$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{U_n}(\varepsilon) = (n+1)\varepsilon^n$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question 1 que les racines de $U_n$ sont les $\cos(\frac{k\pi}{n+1})$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in ]-1, 1[$, $\widetilde{U_n}(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-X^2)U_n''(X) - 3XU_n'(X) + n(n+2)U_n(X) = 0$.
12. Lien entre les polynômes de Tchebychev de première et deuxième espèce. On appelle suite de polynômes de Tchebychev de première espèce, la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\widetilde{T_n}(\cos(a)) = \cos(na)$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}$.

**Partie 2 : Propriétés arithmétiques des polynômes $(U_n)$**

13. Montrer que la suite $(U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante.
14. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n$ et $U_{n+1}$ sont premiers entre eux.
15. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq 1$, $U_{n+p+1} = U_nU_{p+1} - U_{n-1}U_p$.
16. Déduire de la question 15 que $\forall n \geq 1$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $U_{n+p+1} \wedge U_p = U_n \wedge U_p$.
17. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \wedge U_{2n} = 1$.
18. Montrer que
$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{pgcd}(U_m, U_n) = U_{m\wedge n-1}.$$

**Partie 3 : Extrema de $U_n$**

19. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$.
20. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1,1]$, $|\widetilde{U_n}(x)| \leq n+1$.
21. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in[-1,1]} |\widetilde{U_n}(x)| = n+1$.
22. Montrer que $\forall n \geq 1$, l'équation $|\widetilde{U_n}(x)| = n+1$ a exactement deux solutions distinctes dans $[-1,1]$, que l'on précisera.

**Partie 4 : Décomposition en éléments simples**

23. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{U_n(X)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\sin(\frac{k\pi}{n+1})^2}{X - \cos(\frac{k\pi}{n+1})}.$$
24. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$,
$$\frac{P(X)}{(X^2-1)U_n(X)} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\widetilde{P}(1)}{X-1} - \frac{(-1)^n\widetilde{P}(-1)}{X+1}\right) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\widetilde{P}(\cos(\frac{k\pi}{n+1}))}{X-\cos(\frac{k\pi}{n+1})}.$$
25. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ unitaire avec $\deg(P) = n+1$,
$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\widetilde{P}(1) - (-1)^n\widetilde{P}(-1)\right) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\widetilde{P}(\cos(\frac{k\pi}{n+1})).$$

---

**Problème 2 :**

A. **Étude d'une fonction**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x\operatorname{sh}(1/x)$.

1. Étudier la parité de $f$.
2. (a) Rappeler un équivalent de la fonction $\mathrm{sh}$ en $0$ et en déduire les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de $f$ en $0$.
3. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{ch}(1/x).$$
4. Montrer que $\forall t > 0$, $\mathrm{th}(t) < t$.
5. En déduire le tableau de variations de $f$.
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en $0$ de la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t)}{t}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, $f$ admet un développement de la forme
$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o(1/x^4)$$
   où $a_0, \dots, a_4$ sont cinq réels que l'on déterminera.
8. Montrer que la fonction $x \mapsto f(1/x)$ se prolonge en une fonction continue, notée $F$, puis prouver que $F$ est dérivable.

B. **Étude d'une suite**

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation
$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$
   admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note $u_n$.

   On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions suivantes.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
4. En utilisant la partie A, déterminer un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.