DS 8
Polynômes - DL
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 12 Mars 2025

Problème 1 (Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce) :
On pose

$$\begin{cases} U_1(X) = 1 \\ U_2(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+2}(X) = XU_{n+1}(X) - U_n(X). \end{cases}$$

Partie 1 : Généralités sur les polynômes U_n

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sin((n+1)a) &= \mathfrak{Im}(e^{i(n+1)a}) \\
&= \mathfrak{Im}((\cos(a) + i\sin(a))^{n+1}) \\
&= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k \sin(a)^k \cos(a)^{n+1-k}\right) && \text{Newton} \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n+1 \\ k \equiv 1\ [2]}} \binom{n+1}{k} i^{k-1} \sin(a)^k \cos(a)^{n+1-k} \\
&= \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k \sin(a)^{2k+1} \cos(a)^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k \sin(a)^{2k+1} \cos(a)^{n-2k} \\
&= \sin(a) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k \sin(a)^{2k} \cos(a)^{n-2k} \\
&= \sin(a) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k (1 - \cos(a)^2)^k \cos(a)^{n-2k}
\end{aligned}$$

On pose $P_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k (1 - X^2)^k X^{n-2k} \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$\sin(na) = \sin(a)\widetilde{P_n}(\cos(a)).$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sin((n+1)a) = \sin(a)\widetilde{P_n}(\cos(a))$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sin((n+1)a) = \sin(a)\widetilde{P_n}(\cos(a)) = \sin(a)\widetilde{Q_n}(\cos(a))$. On a donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sin(a)(\widetilde{P_n - Q_n})(\cos(a)) = 0$. En particulier,

$$\forall x \in [-1,1],\ \sin(\arccos(x))(\widetilde{P_n - Q_n})(\cos(\arccos(x))) = 0.$$

Et donc, $\forall x \in [-1,1]$, $\sqrt{1-x^2}(\widetilde{P_n - Q_n})(x) = 0$. D'où $\forall \in]-1,1[$, $(\widetilde{P_n - Q_n})(x) = 0$. Donc le polynôme $P_n - Q_n$ a une infinité de racines distinctes. Et donc $P_n - Q_n = 0$. Donc $P_n = Q_n$.

D'où l'unicité de la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(a)\widetilde{U_0}(\cos(a)) = \sin(a)$ et $\sin(a)\widetilde{U_1}(\cos(a)) = 2\sin(a)\cos(a) = \sin(2a)$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = P_n$ et $U_{n+1} = P_{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathbb{R},\ \sin(a)\widetilde{U_{n+2}}(\cos(a)) &= 2\sin(a)\cos(a)\widetilde{U_{n+1}}(\cos(a)) - \sin(a)\widetilde{U_n}(\cos(a)) \\
&= 2\cos(a)\sin((n+2)a) - \sin((n+1)a) \\
&= 2\cos(a)(\sin(a)\cos((n+1)a) + \sin((n+1)a)\cos(a)) - \sin((n+1)a) \\
&= \sin((n+1)a)(2\cos(a)^2 - 1) + 2\cos(a)\sin(a)\cos((n+1)a) \\
&= \sin((n+1)a)\cos(2a) + \sin(2a)\cos((n+1)a) \\
&= \sin((n+1)a + 2a) \\
&= \sin((n+3)a)
\end{aligned}$$

Donc, par récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sin(a)\widetilde{U_n}(\cos(a)) = \sin((n+1)a)$.

Donc la suite de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 1. Puis par unicité de la question 2, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = P_n$.

4. On a

$$U_2(X)4X^2 - 1, \qquad U_3(X) = 8X^3 - 4X, \qquad U_4(X) = 16X^4 - 12X^2 + 1.$$

5. On a déjà $\deg(U_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(U_n) = 2^n$ pour $n \in \{0,1,2,3,4\}$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(U_n) = n$, $\deg(U_{n+1}) = n+1$, $\operatorname{coeff\,dom}(U_n) = 2^n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(U_{n+1}) = 2^{n+1}$.

Par définition de la suite, on a $U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$. Donc $\deg(2XU_n) = n+2 > n = \deg(U_n)$. Donc $\deg(U_{n+2}) = \max(\deg(2XU_{n+1}), \deg(U_n)) = n+2$. Et par conséquent, $\operatorname{coeff\,dom}(U_{n+2}) = \operatorname{coeff\,dom}(2XU_{n+1}) = 2\operatorname{coeff\,dom}(U_{n+1}) = 2^{n+2}$.

Donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(U_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(U_n) = 2^n$.

6. Par les calculs précédents, on a aussi $U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 \in \mathbb{Z}[X]$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n, U_{n+1} \in \mathbb{Z}[X]$. Alors $2XU_{n+1}(X) \in \mathbb{Z}[X]$ car $\mathbb{Z}$ est un anneau (donc stable par produit). Et donc $U_{n+2}(X) = 2XU_{n+1}(X) - U_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ car $\mathbb{Z}$ est stable par addition.

Donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathbb{Z}[X]$.

7. D'après la question 4, on a U_0, U_2, U_4 pairs et U_1, U_3 impairs.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que U_{2n} pair et U_{2n+1} impair. Alors

$$U_{2n+2}(-X) = -2XU_{2n+1}(-X) - U_{2n}(-X) = 2XU_{2n+1}(X) - U_{2n}(X) = U_{2n+2}(X)$$

Donc U_{2n+2} est pair. Puis

$$U_{2n+3}(-X) = -2XU_{2n+2}(-X) - U_{2n+1}(-X) = 2XU_{2n+2}(X) + U_{2n+1}(X) = -U_{2n+3}(X)$$

Donc U_{2n+3} est impair.

Donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, U_{2n} est pair et U_{2n+1} est impair. Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est de la même parité que n.

8. Par parité, on pourrait de se contenter de calculer les $\widetilde{U_n}(1)$. Mais faisons les deux d'un coups.

Soit $\varepsilon \in \{-1,1\}$. D'après 4, on a $\widetilde{U_n}(\varepsilon) = (n+1)\varepsilon^n$ pour $n \in \{0,1,2,3,4\}$. Supposons alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\widetilde{U_n}(\varepsilon) = (n+1)\varepsilon^n$ et $\widetilde{U_{n+1}}(\varepsilon) = (n+2)\varepsilon^{n+1}$. Alors

$$\widetilde{U_{n+2}}(\varepsilon) = 2\varepsilon\widetilde{U_{n+1}}(\varepsilon) - \widetilde{U_n}(\varepsilon)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(n+2)\varepsilon^{n+2} - (n+1)\varepsilon^{n+1} && \text{HR} \\
&= (2n+4-n-1)\varepsilon^{n} && \text{car } \varepsilon^2 = 1 \\
&= (n+3)\varepsilon^{n+2}
\end{aligned}
$$

Et donc, par récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\widetilde{U_n}(\varepsilon) = (n+1)\varepsilon^n$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $0 < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{k\pi}{n+1} \leq \frac{n\pi}{n+1} < \pi$. Donc $\sin(\frac{k\pi}{n+1}) \neq 0$. Et donc

$$\widetilde{U_n}(\cos(\frac{k\pi}{n+1})) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin(\frac{k\pi}{n+1})} = 0.$$

D'autres part, $\cos$ est bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Donc les $\cos(\frac{k\pi}{n+1})$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ sont deux à deux distincts. Par conséquent, on vient de trouver n racines distinctes de U_n. Or $\deg(U_n) = n$. Donc U_n est scindé à racines simples et toutes ses racines sont les $\cos(\frac{k\pi}{n+1})$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sin(a)\widetilde{U_n}(\cos(a)) = \sin((n+1)a)$. Or $\forall a \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\sin(a) \neq 0$. Donc

$$\forall a \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \widetilde{U_n}(\cos(a)) = \frac{\sin((n+1)a)}{\sin(a)}.$$

Or $\forall x \in]-1, 1[$, $\arccos(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \neq 0$. Et donc

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \widetilde{U_n}(x) = \widetilde{U_n}(\cos(\arccos(x))) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))} = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 1, on a $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sin(a)\widetilde{U_n}((\cos(a)) = \sin((n+1)a)$. Or $\cos \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\widetilde{U_n} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car polynomiale. Donc, par composition, $\widetilde{U_n} \circ \cos \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Et également, $a \mapsto \sin((n+1)a) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Alors, en dérivant, on a

$$\forall a \in \mathbb{R},\ (n+1)\cos((n+1)a) = \cos(a)\widetilde{U_n}(\cos(a)) - \sin(a)^2\widetilde{U_n}'(\cos(a)).$$

Puis, en dérivant une seconde fois,

$$\forall a \in \mathbb{R},\ -(n+1)^2\sin((n+1)a) = -\sin(a)\widetilde{U_n}(\cos(a)) - 3\sin(a)\cos(a)\widetilde{U_n}'(\cos(a)) + \sin(a)^3\widetilde{U_n}''(\cos(a)).$$

Et donc aussi, avec 1,

$$\forall a \in \mathbb{R},\ 0 = (n^2+2n)\sin(a)\widetilde{U_n}(\cos(a)) - 3\sin(a)\cos(a)\widetilde{U_n}'(\cos(a)) + \sin(a)^3\widetilde{U_n}''(\cos(a)).$$

Or $\forall a \in]0, \pi[$, $\sin(a) \neq 0$ et donc

$$\forall a \in]0, \pi[,\ 0 = n(n+2)\widetilde{U_n}(\cos(a)) - 3\cos(a)\widetilde{U_n}'(\cos(a)) + (1-\cos(a)^2)\widetilde{U_n}''(\cos(a)).$$

Donc le polynôme $n(n+2)U_n(X) - 3XU_n'(X) + (1-X^2)U_n''(X)$ a un infinité de racines. Et donc

$$n(n+2)U_n(X) - 3XU_n'(X) + (1-X^2)U_n''(X) = 0.$$

12. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynôme de Tchebychev de première espèce. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\widetilde{T_n}(\cos(a)) = \cos(na)$. Or $a \mapsto \cos(na)$ est dérivable et $a \mapsto \widetilde{T_n}(\cos(a))$ également. Donc, par dérivation,

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \sin(a)\widetilde{T_n}'(\cos(a)) = n\sin(na).$$

En particulier,

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \sin(a)\widetilde{T_{n+1}}'(\cos(a)) = (n+1)\sin((n+1)a).$$

Et donc, le polynôme $\frac{1}{n+1}T_{n+1}'$ vérifie la relation 1. Or par unicité de la question 2, on a $U_n = \frac{1}{n+1}T_{n+1}'$.

Partie 2 : Propriétés arithmétiques des polynômes (U_n)

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathbb{R},\ \sin(a)^2\widetilde{U_n}^2(\cos(a)) - \sin(a)^2\widetilde{U_{n+1}}(\cos(a))\widetilde{U_{n-1}}(\cos(a)) \\
&= \sin((n+1)a)^2 - \sin(na)\sin((n+2)a) \\
&= \sin((n+1)a)^2 - \frac{1}{2}(\cos(2a) - \cos((2n+2)a)) \\
&= \sin((n+1)a)^2 - \frac{1}{2}\cos(2a) + \frac{1}{2}(1 - 2\sin((n+1)a)^2) \\
&= -\frac{1}{2}\cos(2a) + \frac{1}{2} \\
&= \sin(a)^2
\end{aligned}$$

Or $\forall a \in]0,\pi[,\ \sin(a) \neq 0$. Donc $\forall a \in]0,\pi[,\ \widetilde{U_n}^2(\cos(a)) - \widetilde{U_{n-1}}(\cos(a))\widetilde{U_{n+1}}(\cos(a)) = 1$. Donc $U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} - 1$ a une infinité de racines distinctes. Donc $U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} = 1$.

Donc la suite de polynômes $(U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale au polynôme constante égale à 1.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $D \in \mathbb{R}[X]$ un diviseur commun de U_n et U_{n+1}. Alors $D|U_n^2$ et $D|U_{n+1}U_{n-1}$. Donc $D|(U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1})$. Et donc $D|1$ d'après la question 13. Donc D est un polynôme constant non nul. Donc les seuls diviseurs communs de U_n et U_{n+1} sont les polynômes constants non nuls. Et donc U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

De plus, $U_0(X) = 1$. Donc U_0 et U_1 sont premiers entre eux.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$U_n(X)U_1(X) - U_{n-1}(X)U_0(X) = 2XU_n(X) - U_{n-1}(X) = U_{n+1}(X).$$

Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq 1,\ U_nU_{p+1} - U_{n-1}U_p = U_{n+p+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_nU_{p+2} - U_{n-1}U_{p+1} &= U_n(2XU_{p+1} - U_p) - U_{n-1}U_{p+1} \\
&= (2XU_n - U_{n-1})U_{p+1} - U_nU_p \\
&= U_{n+1}U_{p+1} - U_nU_p \\
&= U_{n+2+p} \qquad \text{HR}
\end{aligned}$$

Donc, par récurrence,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+p+1} = U_nU_{p+1} - U_{n-1}U_p.$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Posons $D = U_n \wedge U_p$. Donc D est un diviseur commun de U_n et U_p. En particulier, $D|(U_nU_{p+1} - U_{n-1}U_p)$. Donc $D|U_{n+p+1}$. Or $D|U_p$. Donc D est un diviseur commun de U_{n+p+1} et U_p. Donc, par caractérisation des PGCD, $D|(U_{n+p+1} \wedge U_p)$.

Posons $P = U_{n+p+1} \wedge U_p$. Alors $P|(U_{n+p+1} + U_{n-1}U_p)$, donc $P|(U_nU_{p+1})$. Par ailleurs, $U_p \wedge U_{p+1} = 1$ d'après 14. Or $P|U_p$. Donc $P \wedge U_{p+1} = 1$. On a donc $P|U_nU_{p+1}$ et $P \wedge U_{p+1} = 1$. Donc $P|U_n$ par le lemme de Gauss. Par conséquent, P est un diviseur commun de U_n et U_p. Donc, par caractérisation des PGCD, $P|(U_n \wedge U_p)$.

Finalement, $P|D$ et $D|P$. Donc D et P sont des polynômes associés. De plus D et P sont unitaires. Donc $D = P$. Donc $U_n \wedge U_p = U_p \wedge U_{n+p+1}$.

17. Soit $n \geq 2$. D'après la question précédente, on a

$$U_{2n} \wedge U_n = U_{(n-1)+n+1} \wedge U_n = U_{n-1} \wedge U_n = 1$$

en utilisant la question 14.

Et $U_1 \wedge U_2 = 1$ en utilisant la même question. De plus, $U_0 = 1$. Donc $U_0 \wedge U_0 = 1$. Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \wedge U_{2n} = 1$.

18. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 9,

$$U_m(X) = 2^m \prod_{k=1}^{m} \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right)\right), \qquad U_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

Comme U_m et U_n sont scindé à racines simples, un pgcd de U_m et U_n sera scindé à racines simples dont les racines seront les racines communes de U_m et U_n.

Soit donc $k \in \{1, \dots, m\}$, $\ell \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\cos(\frac{k\pi}{m+1}) = \cos(\frac{\ell\pi}{n+1})$. Or $0 < \frac{k\pi}{m+1}, \frac{\ell\pi}{n+1} < \pi$ et $\cos$ est injectif sur $[0, \pi]$. Donc $\frac{k\pi}{m+1} = \frac{\ell\pi}{n+1}$. Et donc aussi $(n+1)k = (m+1)\ell$.

Soit $d = (n+1) \wedge (m+1)$. Alors, par caractérisation du pgcd par les entiers premiers entre eux, $\exists n', m' \in \mathbb{N}^*$ tels que $n' \wedge m' = 1$ et $n+1 = dn'$ et $m+1 = dm'$. On a donc $dn'k = dm'\ell$. Or $d \neq 0$ et $\mathbb{Z}$ est intègre. Donc $n'k = m'\ell$. Donc $n'|m'\ell$. Or $n' \wedge m' = 1$. Donc, par le lemme de Gauss, $n'|\ell$.

Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\ell = qn'$. Alors $n'kl = m'\ell = m'n'q$. Or $n' \neq 0$. Donc $k = m'q$.

Et donc
$$\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) = \cos\left(\frac{qm'\pi}{dm'}\right) = \cos\left(\frac{q\pi}{d}\right) = \cos\left(\frac{qn'\pi}{dn'}\right) = \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right).$$

Notons de plus que
$$0 < q = \frac{k}{m'} \leq \frac{m}{m'} < \frac{m+1}{m'} = d.$$

Or $q \in \mathbb{N}$. Donc $q \in \{1, \dots, d-1\}$.

On vient donc de montrer qu'une racine commune de U_m et U_n est de la forme $\cos\left(\frac{q\pi}{d}\right)$ avec $q \in \{1, \dots, d-1\}$ et $d = (m+1) \wedge (n+1)$.

Réciproquement, si $q \in \{1, \dots, d-1\}$ avec $d = (m+1) \wedge (n+1)$, alors
$$\cos\left(\frac{qn'\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{qn'\pi}{dn'}\right) = \cos\left(\frac{q\pi}{d}\right) = \cos\left(\frac{qm'\pi}{dm'}\right) = \cos\left(\frac{qm'\pi}{m+1}\right).$$

Or $qn' \leq n$ et $qm' \leq m$. Donc $\cos\left(\frac{qn'\pi}{n+1}\right)$ et $\cos\left(\frac{qm'\pi}{m+1}\right)$ sont des racines de U_n et U_m respectivement.

Finalement, les racines communes de U_n et U_m sont les $\cos(\frac{q\pi}{d}r)$ avec $q \in \{1, \dots, d-1\}$ et $d = (m+1) \wedge (n+1)$. D'où
$$U_m \wedge U_n = \prod_{q=1}^{d-1} \left(X - \cos\left(\frac{q\pi}{d}\right)\right).$$

Et donc
$$\operatorname{pgcd}(U_m, U_n) = 2^d \prod_{q=1}^{d-1} \left(X - \cos\left(\frac{q\pi}{d}\right)\right) = U_{d-1} = U_{(m+1)\wedge(n+1)-1}.$$

Partie 3 : Extrema U_n

19. Il y a plusieurs façon de montrer cette relation. Faisons le par récurrence.

On a évidemment $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(0 \times \theta)| = 0 \leq 0 \times |\sin(\theta)|$. Et bien sûr $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(\theta)| \leq |\sin(\theta)|$. Pour être sûr, observons un cran de plus :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(2\theta)| = 2|\sin(\theta)\cos(\theta)| \leq 2|\sin(\theta)|$$
car $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\cos(\theta)| \leq 1$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$. Alors
$$\begin{aligned}\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin((n+1)\theta)| &= |\sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta)| \\ &\leq |\sin(n\theta)\cos(\theta)| + |\cos(n\theta)\sin(\theta)| && \text{inéga triangulaire} \\ &\leq n|\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| && \text{HR} \\ &= (n+1)|\sin(\theta)|\end{aligned}$$

Donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$.

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 1, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(\theta)\widetilde{U_n}(\cos(\theta))| = |\sin((n+1)\theta)| \leq (n+1)|\sin(\theta)|$ d'après la question précédente. Puis, $\forall \theta \in]0, \pi[$, $|\widetilde{U_n}(\cos(\theta))| \leq n+1$. Donc $\forall x \in]-1, 1[$, $|\widetilde{U_n}(x)| \leq n+1$.

Or, d'après la question 8, $|\widetilde{U_n}(\pm 1)| = n+1$. Donc finalement $\forall x \in [-1, 1]$, $|\widetilde{U_n}(x)| \leq n+1$. Et donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1, 1],\ |\widetilde{U_n}(x)| \leq n+1.$$

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\widetilde{U_n}$ est une fonction polynomiale donc en particulier continue sur $[-1,1]$. Par théorème des bornes atteintes, $\widetilde{U_n}$ est bornée et atteint ses bornes sur $[-1,1]$, *i.e.* $\exists a \in [-1,1]$ tel que $\forall x \in [-1,1]$, $|\widetilde{U_n}(x)| \leq |\widetilde{U_n}(a)|$. Donc $|\widetilde{U_n}(a)| = \max_{x\in[-1,1]} |\widetilde{U_n}(x)|$. Or $\widetilde{U_n}(1) = n+1$ et donc, d'après la question précédente,

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\widetilde{U_n}(x)| = \max_{n\in[-1,1]} |\widetilde{U_n}(x)| = |\widetilde{U_n}(1)| = n+1.$$

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 8, on a $|\widetilde{U_n}(1)| = n+1 = |\widetilde{U_n}(-1)|$.

De plus, si $\theta \in]0,\pi[$, $|\cos(\theta)| < 1$. Donc, en reprenant la récurrence de la question 19, on obtient

$$\begin{aligned}\forall \theta \in]0,\pi[,\ |\sin((n+1)\theta)| &= |\sin(n\theta)\cos(\theta)| + |\cos(n\theta)\sin(\theta)| \\ &< |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)|\end{aligned}$$

Et donc, par récurrence, on montrer que $\forall n \geq 2$, $\forall \theta \in]0,\pi[$, $|\sin(n\theta)| < n|\sin(\theta)|$. D'où l'on déduit immédiatement

$$\forall \theta \in]0,\pi[,\ |\widetilde{U_n}(\cos(\theta))| = \frac{|\sin((n+1)\theta)|}{|\sin(\theta)|} < n+1.$$

Et donc $\widetilde{U_n}$ atteint ses extremums sur $[-1,1]$ seulement en 1 et -1.

Partie 4 : Décomposition en éléments simples

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 9, U_n est scindé à racine simples qui sont les $\cos(\frac{k\pi}{n+1})$ pour $k \in \{1,\dots,n\}$. Et d'après 5, $\operatorname{coeff\,dom}(U_n) = 2^n$. Donc

$$U_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

Par décomposition en éléments simples, $\exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\frac{1}{U_n(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}.$$

Par le cas des partie polaire d'un pôle simple,

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \lambda_k = \left(\widetilde{\frac{X - \cos(\frac{k\pi}{n+1})}{U_n(X)}}\right)\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right) = \frac{1}{2^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \left(\cos(\frac{k\pi}{n+1}) - \cos(\frac{i\pi}{n+1})\right)}$$

Or

$$U_n'(X) = 2^n \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \left(X - \cos(\frac{i\pi}{n+1})\right)$$

Donc

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ 2^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \left(\cos(\frac{k\pi}{n+1}) - \cos(\frac{i\pi}{n+1})\right) = \widetilde{U_n'}\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right).$$

Donc

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \lambda_n = \frac{1}{\widetilde{U_n'}(\cos(\frac{k\pi}{n+1}))}.$$

Par ailleurs, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sin((n+1)a) = \sin(a)\widetilde{U_n}(\cos(a))$. Par dérivation, on a donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $(n+1)\cos((n+1)a) = \cos(a)\widetilde{U_n}(\cos(a)) - \sin(a)^2\widetilde{U_n'}(\cos(a))$. Et donc

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \widetilde{U_n'}(\cos(\frac{k\pi}{n+1})) = -\frac{(n+1)\cos(k\pi)}{\sin(\frac{k\pi}{n+1})^2} = \frac{(n+1)(-1)^{k-1}}{\sin(\frac{k\pi}{n+1})^2}.$$

Finalement,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_n = \frac{(-1)^{k-1}\sin(\frac{k\pi}{n+1})^2}{n+1}.$$

Et donc,

$$\frac{1}{U_n(X)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sin(\frac{k\pi}{n+1})^2}{X-\cos(\frac{k\pi}{n+1})}.$$

24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Alors $\deg(P) \leq n+1 < n+2 = \deg((X^2-1)U_n(X))$. D'autre part, 1 et -1 ne sont pas racines de U_n d'après la question 9. Donc $(X^2-1)U_n(X)$ est scindé à racines simples. Donc, par décomposition en éléments simples, $\exists!(\mu_1, \ldots, \mu_n, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{n+2}$,

$$\frac{P(X)}{(X^2-1)U_n(X)} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{X+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{X-\cos(\frac{k\pi}{n+1})}.$$

Et, par le cas des pôles simples,

$$\lambda_1 = \frac{\widetilde{P}(1)}{\widetilde{V_n'}(1)}, \qquad \lambda_2 = \frac{\widetilde{P}(-1)}{\widetilde{V_n'}(-1)},\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \mu_k = \frac{\widetilde{P}(\cos(\frac{k\pi}{n+1}))}{\widetilde{V_n'}(\cos(\frac{k\pi}{n+1}))}.$$

On pose $V_n(X) = (X^2-1)U_n(X)$. Donc $V_n'(X) = 2XU_n(X) + (X^2-1)U_n'(X)$. Donc $\widetilde{V_n'}(1) = 2\widetilde{U_n}(1) = 2n+2$ et $\widetilde{V_n'}(-1) = 2\widetilde{U_n}(-1) = 2(n+1)(-1)^n$ d'après la question 8. Et

$$\begin{aligned}
\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \widetilde{V_n'}\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right) &= \left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})^2 - 1\right)\widetilde{U_n'}\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right) \\
&= -\sin(\frac{k\pi}{n+1})^2\widetilde{U_n'}\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right) \\
&= (n+1)(-1)^k && \text{cf question précédente}
\end{aligned}$$

D'où

$$\lambda_1 = \frac{\widetilde{P}(1)}{2(n+1)}, \qquad \lambda_2 = \frac{(-1)^n\widetilde{P}(-1)}{2(n+1)}, \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \mu_k = \frac{(-1)^k\widetilde{P}\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right)}{n+1}.$$

Et donc

$$\frac{P(X)}{(X^2-1)U_n(X)} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\widetilde{P}(1)}{X-1} + \frac{(-1)^n\widetilde{P}(-1)}{X+1}\right) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\widetilde{P}(\cos(\frac{k\pi}{n+1}))}{X-\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}.$$

25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ unitaire de degré $n+1$. En réutilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
P(X) = \frac{1}{2(n+1)}&\left(\widetilde{P}(1)(X+1) - (-1)^n\widetilde{P}(-1)(X-1)\right)U_n(X) \\
&+ \frac{2^n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\widetilde{P}\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right)\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\left(X-\cos(\frac{i\pi}{n+1})\right)\right).
\end{aligned}$$

Or $\deg(P) = n+1$ et $\deg(U_n) = n$. Puis $\deg(\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(X-\cos(\frac{k\pi}{n+1}))) = n-1$. Et comme P est unitaire, on en déduit donc

$$1 = \operatorname{coeff}\operatorname{dom}(P) = \operatorname{coeff}_{X^{n+1}}(P) = \frac{2^n}{2(n+1)}\left(\widetilde{P}(1) - (-1)^n\widetilde{P}(-1)\right) + \frac{2^n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\widetilde{P}\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right)$$

Et donc

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\widetilde{P}(1) - (-1)^n\widetilde{P}(-1)\right) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\widetilde{P}\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right).$$

Problème 2 :

A. **Étude d'une fonction**

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\,\mathrm{sh}(1/x)$.

(a) La fonction sh est définie sur $\mathbb{R}$, donc par composition, $x \mapsto \mathrm{sh}(1/x)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et par produit, f est définie sur $\mathbb{R}^*$, qui est symétrique par rapport à 0.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -x\,\mathrm{sh}(-1/x) = x\,\mathrm{sh}(1/x) = f(x)$ car sh est impaire. Donc f est paire.

(b) i. On sait que $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ par caractérisation des équivalents par les o.

Or $1/x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, donc $\mathrm{sh}(1/x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 1/x$. Et donc, par produit, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 1$. Donc $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$.

ii. On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{2}(xe^{1/x} - xe^{-1/x})$.

Par croissance comparée, $\frac{1}{y}e^y \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$ et $\frac{1}{y}e^{-y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$. Or $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, donc par composition dans les limites, $xe^{1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $xe^{-1/x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$. Par sommation, on en déduit donc, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

Comme f est paire, on a également $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$.

(c) On a $\mathrm{sh} \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $x \mapsto \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$, donc par composition, $x \mapsto \mathrm{sh}(1/x) \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. Et par produit, $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. Et enfin

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) &= \mathrm{sh}(1/x) - \frac{1}{x}\,\mathrm{ch}(1/x)\\
&= \left(\frac{\mathrm{sh}(1/x)}{\mathrm{ch}(1/x)} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{ch}(1/x)\\
&= \left(\mathrm{th}(1/x) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{ch}(1/x).
\end{aligned}$$

(d) On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ et $\mathrm{th} \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $h : t \mapsto \mathrm{th}(t) - t$. Alors, par structure d'espace vectoriel de $\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Et $\forall t \in \mathbb{R}$, $h'(t) = 1 - \mathrm{th}(t)^2 - 1 = -\mathrm{th}(t)^2 \leq 0$ et même $\forall t > 0$, $h'(t) < 00$.

Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $h(0) = 0$ donc $\forall t > 0$, $h(t) < 0$ et donc $\forall t > 0$, $\mathrm{th}(t) < t$.

(e) Grâce à la question précédente, on a $\forall x > 0$, $\mathrm{th}(1/x) - 1/x < 0$. Donc $\forall x > 0$, $f'(x) < 0$ car $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$. On en déduit le tableau, en utilisant la parité de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		‖	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

(f) On a $\mathrm{sh}(t) \underset{t\to 0}{=} t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^5)$. Donc

$$\frac{\mathrm{sh}(t)}{t} \underset{t\to 0}{=} 1 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{120}t^4 + o(t^4).$$

(g) Comme, $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, on a donc

$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}(1/x)}{1/x} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o(1/x^4).$$

On a donc $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \sum_{k=0}^{4} \frac{a_k}{x^k} + o(1/x^4)$ avec $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 0, 1/6, 0, 1/120)$.

(h) On sait que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Donc par composition, $x \mapsto f(1/x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

De plus, $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$. Donc, par composition dans les limites, $f(1/x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$. Donc $x \mapsto f(1/x)$ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1. Autrement dit

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(1/x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

De plus, d'après 3, $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Donc, toujours par composition de fonctions dérivables, $F \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

Or $\forall x \neq 0$, $F'(x) = -\frac{f'(1/x)}{x^2} = -\frac{(\operatorname{th}(x) - x)\operatorname{ch}(x)}{x^2}$ d'après la question 3. Mais $\operatorname{ch}(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1$ d'après le développement limité de ch par exemple. Et

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(x) &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \\ &= \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{th}(x) - x \underset{x \to 0}{=} -x^3/3 + o(x^3) \underset{x \to 0}{\sim} -x^3/3$ par caractérisation des équivalents par les o. D'où $F'(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{-x^3/3}{x^2} \times 1 = x/3$. Donc $F'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Or $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Donc par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (*i.e.* par théorème satanique), F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Finalement, $F \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $F'(0) = 0$.

On remarquera qu'il est facile de montrer qu'en fait F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et même qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

B. **Étude d'une suite**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après le tableau de variations de f fait à la question A5, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue. Donc, par théorème de la bijection, f établie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f(\mathbb{R}_+^*)$. D'après le tableau de variations, on a $f(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$ (TVI et monotonie).

Or $\frac{n+1}{n} = 1 + 1/n > 1$. Donc $\frac{n+1}{n} \in f(\mathbb{R}_+^*)$. Donc par bijectivité, $\exists! u_n \in \mathbb{R}_+^*$, $f(u_n) = \frac{n+1}{n}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f(u_n) = 1 + 1/n > 1 + \frac{1}{n+1} = f(u_{n+1})$. Mais f est décroissante strictement sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $u_n < u_{n+1}$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (strictement).

(c) Par théorème de la limite monotone, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty] \iff (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ non majorée.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée. Alors par théorème de la limite monotone encore, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Donc $\exists \ell > 0$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Mais f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$. Or $f(u_n) = 1 + 1/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. Donc par unicité de la limite, $f(\ell) = 1$.

Mais $f(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$. Donc $\forall x > 0$, $f(x) > 1$. Donc en particulier, $1 = f(\ell) > 1$. ☠.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut pas être majorée. Donc elle est non majorée. Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par théorème de la limite monotone.

(d) On a vu en A7 que $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + o(1/x^2)$ en tronquant à l'ordre 2. Donc $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o(u_n^2)$. On en déduit $f(u_n) - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{6u_n^2}$ par caractérisation de $\sim$ par o.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = 1 + 1/n$. Donc $f(u_n) - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} 1/n$. Par transitivité de $\sim$, on en déduit donc

$$\frac{1}{6u_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \iff u_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{6}$$

$$\iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n/6} \qquad \text{car } u_n > 0$$