NOM :

Prénom :

Mardi 18 Mars 2025

Interrogation 20

Matrices

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition du produit matriciel.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k})_{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $AB = (c_{i,k})_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est définie par

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \forall k \in \{1,\dots,q\},\ c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}$$

2. Produit d'une matrice par une colonne.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X = (x_j)_{1\le j\le p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Et

$$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j(A).$$

3. Définition d'une transposée.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la transposée de A, notée ${}^tA = (a'_{j,i})_{\substack{1\le j\le p\\1\le i\le n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall j \in \{1,\dots,p\}$, $a'_{j,i} = a_{i,j}$.

4. Produit des matrices élémentaires.

Soit $i \in \{1,\dots,n\}$, $j,k \in \{1,\dots,p\}$, $\ell \in \{1,\dots,q\}$, $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $E_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}).$$

5. Caractérisation des matrices diagonales inversibles.

Soit $A = \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{D}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in \{1,\dots,n\},\ a_i \neq 0$. Et dans ce cas, $A^{-1} = \mathrm{diag}(a_1^{-1},\dots,a_n^{-1})$.

6. Définition des matrices symétriques et anti-symétriques.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dit symétrique si $A = {}^tA$. Et A est dite ansitymétrique si $A = -{}^tA$.

7. Définition d'une matrice triangulaire inférieure.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est une matrice triangulaire inférieure si $\forall i,j \in \{1,\dots,n\},\ j > i \implies a_{i,j} = 0$.

8. Propriétés algébriques de la trace.

La trace $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3$. En déduire $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et donner A^{-1}.

Le calcul montre que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 6 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 8 & \\ 16 & & 29 & 22 \\ 7 & 8 & 9 & \end{pmatrix}$$

Et donc $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = 0_3$.

Alors $A(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + \frac{1}{5}I_3) = I_3$. Donc A est inversible à droite. Or $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice carrée. Donc

$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + \frac{1}{5}I_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$