



DM 7

Polynôme et Algèbre Linéaire sont dans un bateau

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 25 Mars 2025

On se place sur $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit deux applications :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{X+1}{2}\right) + P\left(\frac{X}{2}\right) \right) \end{array}$$

et

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \tilde{P}(1) \end{array}$$

Partie I : Étude générale

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Calculer les images des vecteurs de la base canonique par f .
4. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
5. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$. Quel est la dimension de $\ker(\varphi)$?
6. L'application φ est-elle injective ? Surjective ?

Partie II : Calcul des puissances d'un endomorphisme

7. On note $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = -2X + 1$ et $P_2(X) = 6X^2 - 6X + 1$. Justifier que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Calculer les images de \mathcal{B}' par f que l'on exprimera dans la base \mathcal{B}' .
9. Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.
 - (a) Exprimer P dans la base \mathcal{B}'
 - (b) En déduire l'expression de $f^n(P)$ dans la base \mathcal{B}' pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) Exprimer alors $f^n(P)$ dans la base \mathcal{B} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (d) Calculer alors $\varphi(f^n(P))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. À l'aide d'une raisonnement par récurrence, montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}, f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

11. À l'aide de la question précédente, recalculer $\varphi(f^n(P))$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.