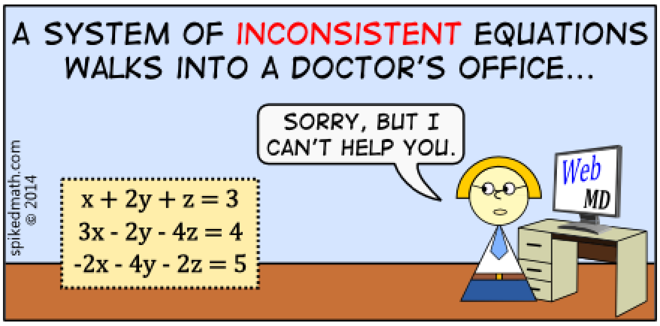
Chapitre 21
Systèmes Linéaires

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

18 mars 2025



Le but de ce chapitre est de voir comment gérer les systèmes d'équations linéaires. On en a déjà croisé souvent, notamment pour déterminer si une famille de vecteur est libre ou non par exemple ou pour décomposer un vecteur dans un certaine base. Ce ne sont là que des exemples.

Jusqu'à présent, on avait résolu ces systèmes un peu empiriquement sans trop se soucier de la façon dont le faisait. On va corriger cette erreur. On va voir les mécanismes qui se cachent derrière la résolution de tels systèmes et les structures des solutions de ces systèmes. Il faudra désormais toujours utiliser ces techniques (à savoir le pivot de Gauss).

Table des matières

1 Présentation des systèmes linéaires

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Système linéaire de p équations à n inconnues) :
Soit $n, p \geq 1$, $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{np}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq p} \in \mathbb{K}^p$. Un système de p équations à n inconnues est un système de la forme

$$(\mathcal{S})\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \quad\vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les inconnues.

Définition 1.2 (Système linéaire homogène associé à un système d'équations) :
Soit $n, p \geq 1$, $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{np}$.

On appelle système homogène associé au système $(\mathcal{S})$ le système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Définition 1.3 (Résoudre un système) :
Résoudre un système $(\mathcal{S})$, c'est trouver l'ensemble S des n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant le système $(\mathcal{S})$.

1.2 Écriture matricielle

Définition 1.4 (Matrices associées à un système) :
Soit $(\mathcal{S})$ un système d'équations linéaires. On définit les matrices associées au système $(\mathcal{S})$ comme les matrices $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ définies par

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \qquad \text{et} \qquad B = (b_j)_{1 \leq j \leq p}$$

La matrice A est appelé matrice du système et B la matrice du second membre du système.

Définition 1.5 (Matrice augmentée) :
Soit $(\mathcal{S})$ un système d'équations linéaires de matrices associées $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
On appelle matrice augmentée de $(\mathcal{S})$, la matrice

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} & b_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} & b_p \end{array}\right)$$

Remarque :
La manipulation des matrices augmentées est au programme. Je vous ais donné la définition. Mais je ne les utiliserais jamais. Le problème c'est que cette notation n'est que pratique. Elle n'est motivé que par la flemme. Donc elle est mauvaise. Elle n'a plus de sens. On ne voit plus apparaître le système sous-jasent, on ne voit plus que c'est une équation. Et donc de fait, c'est une mauvaise notation. Je vous la déconseille fortement. Il est préférable d'écrire $AX = B$ et de manipuler cette expression. Ça fonctionne de la même manière. Mais avec cette notation, on voit le système apparaître, donc on sait ce que l'on fait. Et surtout, il y a certaines manipulations qui peuvent mélanger les variables. Mais ça ne se voit pas avec les matrices augmentées alors qu'avec l'écriture $AX = B$, on voit tout ce qui se passe. Elle permet d'éviter de faire des erreurs en faisant des opérations sans savoir à quoi elles correspondent et de faire des manipulations interdites ou malvenues.

Exemple 1.1 :

Donner les éléments matriciels du système

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2z=1 \\ -x+2y-3z=-2 \end{cases}$$

Remarque :
On pourra donc écrire un système également sous sa forme matricielle

$$AX = B$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, autrement dit

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

1.3 Opérations élémentaires sur les systèmes

1.3.1 Matrices d'opérations élémentaires

Définition 1.6 (Opérations élémentaires sur un système) :
Soit $(\mathcal{S})$ un système d'équations linéaires. Les opérations élémentaires sur le systèmes $(\mathcal{S})$ sont :

- L'échange de la ligne L_i et de la L_j, noté $L_i \leftrightarrow L_j$.
- La multiplication d'une ligne L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$, noté $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- L'ajout de la ligne λL_j à la ligne L_i où $\lambda \in \mathbb{K}$, noté $L_i \leftarrow \lambda L_j + L_i$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Faire des opérations sur les lignes du systèmes modifie également la matrice B, le second membre. C'est la matrice A qui nous intéresse, mais il ne faut pas oublier pour autant la matrice B et de retranscrire ces opérations sur la matrice B (qui a aussi des lignes et autant que la matrices A).

On rappelle que multiplier une matrice à droite revient à faire des opérations sur les colonnes et la multiplier à gauche revient à faire des opérations sur les lignes.

Matriciellement, des opérations sur les lignes reviennent donc à multiplier à gauche par une matrice. Donc

$$(\mathcal{S}) \iff AX = B \iff (PA)X = PB \iff A'X = B'$$

avec $A' = PA$ et $B' = PB$.

!!! ATTENTION !!!

Pour garder les même solutions du systèmes, *i.e.* pour ne pas changer le système, il faut le multiplier par des matrices INVERSIBLES ! Si les matrices ne sont pas inversibles, on introduit un noyau qui va "écraser" les choses et introduire du vide et donc des solutions en plus.

Proposition 1.1 :
Les opérations élémentaires sur un système correspondent aux mêmes opérations élémentaires sur les lignes de la matrice du système.

Proposition 1.2 (Matrices d'opérations élémentaires) :
Les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivantes sont inversibles :

1. $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \neq j \leq n$.
2. $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $1 \leq i \leq n$.
3. $\mathcal{E}_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n$.

Démonstration :

1. La matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$ est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieur (selon si $i < j$ ou $i > j$). Sa diagonale n'est composée que de 1, donc elle est inversible. On a

$$I_n + \lambda E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & j & \\ & & & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \leftarrow \quad i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

2. On a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} i \\ \downarrow \end{array} \\ I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & (0) & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & \dots & & \\ & & & & 1 & & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \quad i \end{array}$$

   Donc c'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

3. On a $\mathcal{E}_{i,j}^2 = I_n$. Donc $\mathcal{E}_{i,j}$ est inversible (et $\mathcal{E}_{i,j}^{-1} = \mathcal{E}_{i,j}$).

□

On refera cette démonstration dans le prochain cours sur les déterminants.

Remarque :
On pourra démontrer un peu plus tard que toutes matrices inversibles peut s'écrire comme produits de matrices d'opérations élémentaires bien choisis.

1.3.2 Opérations élémentaires sur les lignes

On rappelle les résultats suivants qui ont été déjà vus :

Proposition 1.3 (Multiplication à gauche agit sur les lignes [✓]) :
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Alors $\forall k, i \in \{1, \dots, p\}$,

$$E_{k,i}A = \begin{pmatrix} & & \\ & (0) & \\ & & \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ & & \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_i(A) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \quad k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Démonstration :
On a $E_{k,i}A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On note $E_{k,i} = (\delta_{k,r}\delta_{s,i})_{1\leq r,s\leq p}$ et $E_{k,i}A = (b_{\ell,j})_{\substack{1\leq \ell\leq p\\1\leq j\leq n}}$. On a alors $\forall \ell \in \{1, \dots, p\}$ et $\forall j \in \{1, \dots, n\}$,

$$b_{\ell,j} = \sum_{s=1}^{p} \delta_{k,\ell}\delta_{s,i}a_{s,j} = \delta_{k,\ell}a_{i,j}$$

donc $b_{\ell,j} = 0$ dès que $\ell \neq k$ et $b_{k,j} = a_{i,j}$. D'où le résultat. □

Proposition 1.4 (Opérations élémentaires sur les lignes) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \neq j \leq p$, la matrice $(I_p + \lambda E_{i,j})A$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à sa i-ème ligne.
   On note cette manipulation $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \in \{1, \dots, p\}$. La matrice $(I_p + (\lambda - 1)E_{i,i})A$ est obtenue en multipliant la i-ème ligne de A par $\lambda \neq 0$.
   On note cette manipulation $L_i \leftarrow \lambda L_i$
3. Soit $1 \leq i \neq j \leq p$. La matrice $\mathcal{E}_{i,j}A$ est obtenue en échangeant la i-ème ligne avec la j-ème ligne de A.
   On note cette manipulation $L_i \leftrightarrow L_j$.

Démonstration :
Il suffit de reprendre la proposition précédente. □

Proposition 1.5 :
Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le rang

Démonstration :
Ce sont des multiplications matricielles par des matrices inversibles. □

Définition 1.7 (Matrices équivalentes par lignes) :
Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
On dit que A et A' sont équivalentes par lignes, et on note $A \underset{L}{\sim} A'$, si elles se déduisent l'une de l'autre par un nombre finie d'opérations sur les lignes.

Proposition 1.6 (Matrices équivalentes par lignes) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors

$$A \underset{L}{\sim} B \iff \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ QA = B$$

Démonstration :
D'après une remarque précédente (qui sera prouvée dans le chapitre prochain), toute matrice inversible peut s'écrire comme le produit de matrices d'opérations élémentaires. Ce qui donne le sens indirecte. Et le sens directe est évident car les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles. □

Exemple 1.2 :

Donner une matrice simple équivalente par ligne à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque :
$\underset{L}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

Proposition 1.7 (Les opérations sur les lignes conservent le rang) :
Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$A \underset{L}{\sim} A' \implies \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$$

Remarque :
Le rang est donc constant sur les classes d'équivalences de la relation d'équivalence $\underset{L}{\sim}$.

Exemple 1.3 :
Montrer que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Proposition 1.8 (Effet des opérations élémentaires sur les lignes) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Les opérations élémentaires sur les lignes de A conservent le noyau de A.

Démonstration :
Faire des opérations élémentaires sur les lignes revient à multiplier A à gauche par une matrice P inversible qui est le produit de matrices d'opérations élémentaires. P étant inversible, on a $\ker(A) = \ker(PA)$. En effet, $x \in \ker(A) \iff AX = 0 \iff PAX = 0 \iff x \in \ker(PA)$ car P est inversible. $\square$

1.3.3 Opérations élémentaires sur les colonnes

Proposition 1.9 (Multiplication à droite agit les colonnes [✓]) :
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Alors $\forall k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$,

$$AE_{\ell,k} = \begin{array}{c} k \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} & a_{1,\ell} & \\ (0) & \vdots & (0) \\ & a_{p,\ell} & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & C_\ell(A) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration :
On note encore $E_{\ell,k} = (\delta_{\ell,r}\delta_{s,k})_{1\leq r,s\leq n}$ et $AE_{\ell,k} = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$. Alors, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ et $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$b_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r}\delta_{r,\ell}\delta_{j,k} = a_{i,\ell}\delta_{j,k}$$

donc $b_{i,j} = 0$ si $j \neq k$ et $b_{i,k} = a_{i,\ell}$. □

Proposition 1.10 (Opérations élémentaires sur les colonnes) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \neq j \leq n$, alors $A(I_n + \lambda E_{i,j})$ est obtenue en ajoutant λ fois la i-ème colonne de A à la j-ème colonne de A.

   On note cette manipulation $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $1 \leq i \leq n$. La matrice $A(I_n + (\lambda - 1)E_{i,i})$ est la matrice obtenue en multipliant la i-ème colonne de A par $\lambda \neq 0$.

   On note cette manipulation $C_i \leftarrow \lambda C_i$.
3. Soit $1 \leq i \neq j \leq n$. La matrice $A\mathcal{E}_{i,j}$ est obtenue en échangeant la i-ème colonne et la j-ème colonne.

   On note cette manipulation $C_i \leftrightarrow C_j$.

Proposition 1.11 :
Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent le rang.

Définition 1.8 (Matrices équivalentes par colonnes) :
Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Les matrices A et A' sont dites équivalentes par colonnes, et on note $A \underset{C}{\sim} A'$, si A et A' se déduisent l'une de l'autre par un nombre finie d'opérations sur les colonnes.

Remarque :
Là encore, on peut reformule ça sous la forme

$$A \underset{C}{\sim} B \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ AP = B.$$

Proposition 1.12 :
Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$A \underset{C}{\sim} A' \implies \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$$

Remarque :
$\underset{C}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

Exemple 1.4 :
Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en raisonnant sur les colonnes.

Remarque :
En résumé :

- En multipliant une matrice par la droite, on opère sur les colonnes
- En multipliant une matrice par la gauche, on opère sur les lignes.

Proposition 1.13 (Effet sur la matrice des opérations élémentaires sur les colonnes) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Les opérations élémentaires sur les colonnes de A conservent l'image de A.

Démonstration :
Par définition du rang d'une matrice et par stabilité d'un Vect par substitution, faire des opérations élémentaires sur les colonnes ne change pas l'image. Plus précisément, faire des opérations sur

les colonnes de A revient à multiplier A à droite par une matrice inversible P obtenue par produit de matrices d'opérations élémentaires. Et donc $y \in \mathrm{Im}(A) \iff \exists x \in \mathbb{K}^p,\ Y = AX = (AP)(P^{-1}X) \iff y \in \mathrm{Im}(AP)$ puisque P est inversible. $\square$

1.3.4 Matrices équivalentes, systèmes équivalents

Définition 1.9 (Matrices équivalentes) :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
On dit que les matrices A et B sont équivalentes si $\exists P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $\exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $B = P^{-1}AQ$. On note $A \sim B$.

Proposition 1.14 :
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Remarque :
La relation d'équivalence matricielle correspond donc à des opérations élémentaires sur les lignes ET les colonnes.

Proposition 1.15 :
Le rang est constant sur les classes d'équivalences de l'équivalence matricielle, *i.e.* $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\forall P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $\forall Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(P^{-1}AQ)$.

Proposition 1.16 (Systèmes équivalents) :
Soit $(\mathcal{S})$ un système d'équations linéaires et $(\mathcal{S}')$ un système d'équations linéaires obtenues par un nombre finies d'opérations élémentaires sur les lignes de $(\mathcal{S})$.
Alors le système $(\mathcal{S})$ est équivalent (logiquement équivalent) au système $(\mathcal{S}')$. Autrement dit, $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ ont le même ensemble de solutions.

On note, selon les opérations nécessaires pour passer du système $(\mathcal{S})$ au système $(\mathcal{S}')$:

$$(\mathcal{S}) \underset{L_i \leftrightarrow L_j}{\iff} (\mathcal{S}') \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}) \underset{L_i \leftarrow \lambda L_i}{\iff} (\mathcal{S}') \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}) \underset{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}{\iff} (\mathcal{S}')$$

Démonstration :
Les matrices A et A' des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ se déduisent l'une de l'autre par opérations élémentaires sur leurs lignes. Et le passage de l'une à l'autre se fait donc par la multiplication par une matrice inversible. En effet, matriciellement, si on note P la matrice inversible correspondant à la succession

d'opérations sur les lignes, on a

$$(\mathcal{S}) \iff AX = B \iff PAX = PB \iff (\mathcal{S}')$$

$\square$

Exemple 1.5 :

Résoudre le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.3.5 Pivots de Gauss

Définition 1.10 (Système échelonné, Pivots) :
Un système $(\mathcal{S})$ est dit échelonné si sa matrice associée est triangulaire supérieure, *i.e.* s'il est de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & a_{3,3}x_3 & + & \dots & + & a_{3,p}x_p & + & \dots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & & & a_{p,p}x_p & + & \dots & + & a_{p,n}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Donc :

- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes doivent être nulles
- chaque ligne non nulle commence par strictement plus de zéro que la ligne précédente.

Dans ce cas, on appelle pivots du système les premiers coefficients non nuls de chaque ligne.

Exemple 1.6 :
Le système suivant est échelonné

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boxed{2}x_1 & + & 3x_2 & + & -x_3 & & & = & 1 \\ & & \boxed{-3}x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ & & & & & & \boxed{-3}x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

et 2, -3 et -3 sont les pivots du système.

Proposition 1.17 :
La matrice associée à un système échelonné est une matrice triangulaire supérieure.

Remarque :
En observant la matrice d'un système échelonné, les pivots du système sont les premiers coefficients non nuls de chaque ligne de la matrice (⚠qui ne sont pas forcément sur la diagonale !)

1.3.6 Inversion de matrices

Les opérations élémentaires sur les lignes permettent de pouvoir inverser des matrices. En mettant en parallèle la matrice à inverser et la matrice identité, les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice à inverser pour la transformer en l'identité permettent de transformer l'identité en son inverse. Observons sur un exemple :

$$\begin{array}{ccc|c}
 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & & \\
\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & & \\
\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & & \\
\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Cette technique est la technique d'inversion de matrice qui est effectivement à votre programme. Il existe d'autre formule pour inverser une matrice. L'une d'entre elles utilise les déterminants que nous ferons dans le prochain chapitre. Elle n'est officiellement pas au programme mais est bien plus jolie. Je vous la donnerai à titre indicatif. Mais vous serez obligé d'utiliser la méthode au-dessus pour inverser une matrice.

Remarque :
On peut faire la méthode en raisonnant sur les colonnes. Mais attention dans ce cas à la présentation qui ne donne plus les correspondances visuelles.

Il est également possible de mélanger les opérations sur les lignes et sur les colonnes. En effet, cela reviendrait à multiplier la matrice A par deux matrices inversibles obtenues comme produit de matrices d'opérations élémentaires telles que $PAQ = I_n$. Et donc, A est inversible.

⚠Attention cependant ! Dans ce cas, il ne faut pas faire des opérations sur les lignes ET les colonnes à la même étape ! Il faut bien séparer ce que l'on fait. On ne peut pas tout faire en même temps. Sinon, il faudrait pouvoir prévoir les différentes interactions des lignes sur les colonnes. Ce qui n'est pas raisonnable.

Exemple 1.7 :
Inverser les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Résolution de systèmes

2.1 Pivot de Gauss

Proposition 2.1 :
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$ où $r = \operatorname{rg} A$.

Démonstration :
Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A. Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$. donc $\ker f$ est un sev de $\mathbb{K}^n$. Par un corollaire du théorème du rang, tout supplémentaire de $\ker f$ est de dimension r. Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans $\mathbb{K}^n$. Donc $\mathbb{K}^n = H \oplus \ker f$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ adaptée à la somme directe. Donc $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de H et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\ker f$.

Alors $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ (puisque f est un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} f$). Soit maintenant G un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans $\mathbb{K}^p$. On choisit complète alors la famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ par une base de G ce qui nous fournit une base de $\mathbb{K}^p$ adaptée à la somme directe $\mathbb{K}^p = \operatorname{Im} p \oplus G$.

Relativement à ces deux bases, la matrice de f est alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B})) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, en composant par les matrices de changement de bases, on a

$$A = \operatorname{Mat}_{cano_p,cano_n}(f) = \operatorname{Mat}_{cano_p,\mathcal{C}}(\operatorname{Id}_{\mathbb{K}^p}) \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},cano_n}(\operatorname{Id}_{\mathbb{K}^n})$$

□

Proposition 2.2 :
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Alors $\operatorname{rg} A = r$ alors $\exists T \in \mathcal{T}_r^+(\mathbb{K})$ et $\exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} T & * \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$$

Remarque :
Cette proposition est encore vraie en colonne (mais on perd le lien avec les système) :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \exists T \in \mathcal{T}_r^-(\mathbb{K}),\ A = \begin{pmatrix} T & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} P$$

Que l'on peut reformuler dans une version “système” :

Proposition 2.3 :
Tout système d'équations linéaires est équivalent par lignes à un système échelonné en lignes.

Autrement dit, et c'est ça qu'il faut retenir, on peut échelonner un système par une suite d'opérations sur les lignes.
La démonstration consiste en l'application de l'algorithme du Pivot de Gauss (voir cours d'info) :

[Algorithme du Pivot de Gauss]
Un système linéaire de p équations dont les lignes sont $L_1, \dots, L_p$ d'inconnues $x_1, \dots, x_n$.

- Pour k allant de 1 à $\min(n, p)$
  - Si il existe une ligne L_i avec $i \geq k$ où le coefficient $a_{i,k}$ de x_k est non nul, alors :
    - $L_k \leftrightarrow L_i$
    - Pour j variant de $k+1$ à p,
      - $L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{j,k}}{a_{k,k}} L_k$

Proposition 2.4 :
Le rang d'un système correspond au nombre de pivot du système.

Démonstration :
Il suffit de triangulariser la matrice. □

Exemple 2.1 :

Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ a & 1 & a+1 \end{pmatrix}$.

Définition 2.1 (Système incompatible) :
On dit qu'un système $(\mathcal{S})$ est incompatible s'il existe, une fois mis sous sa forme échelonnée, une ligne de la forme "$0 = \alpha$" avec $\alpha \neq 0$.

Proposition 2.5 (Solutions d'un système incompatible) :
Soit $(\mathcal{S})$ un système d'équations linéaires incompatible et S son ensemble de solutions (donc $S \subset \mathbb{K}^n$).

Alors $S = \emptyset$.

Démonstration :
Si le système a une solution, alors le système échelonnée correspondant doit avoir une solution (la même). Donc toutes les équations doivent être vérifiées. En particulier, on doit avoir $0 = \alpha \neq 0$. Ce qui aboutit très clairement à ☠. $\square$

Proposition 2.6 (Caractérisation des systèmes compatibles) :
Soit $(\mathcal{S})$ $AX = B$ un système d'équations linéaires écrit sous forme matricielle, avec $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a équivalence entre :

(i) Le système $(\mathcal{S})$ est compatible

(ii) $b \in \mathrm{Im}(A)$, où b est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à B

(iii) $\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}(A)$

Démonstration :
$\boxed{\text{(i)} \iff \text{(ii)}}$ La meilleure façon de le voir est de repasser par le point de vue vectoriel. Si on note f l'application linéaire canoniquement associée à A et b le vecteur canoniquement associé à B. Le

système s'écrit alors vectoriellement, $f(x) = b$. Et de ce point de vue, il est clair que si $b \notin \operatorname{Im} f$, il n'y a pas de solutions.

$\boxed{\text{(i)} \iff \text{(iii)}}$ On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Si $\mathcal{S}$ est compatible, alors $\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tel que $B = \sum_{k=1}^{n} x_k C_k$. Dans ce cas

$$\operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_n, B) = \operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_n) = \operatorname{rg}(A).$$

Inversement, si $\operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(A)$, alors $\operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_n, B) = \operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_n)$. Mais $\operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n) \subset \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n, B)$. Donc on en déduit $\operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n, B) = \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$. On en déduit donc $\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tel que $B = \sum_{k=1}^{n} x_k C_k$. □

Proposition 2.7 (Nombre de solutions d'un système) :
Soit $(\mathcal{S})$ un système de p équations à n inconnues. Soit r le rang du système et S l'ensemble des solutions (dans $\mathbb{K}^n$).

1. Si $r = n$, alors
   (a) si le système est incompatible, il n'admet aucune solution, *i.e.* $S = \emptyset$
   (b) sinon, le système admet une unique, *i.e.* $\exists! x_0 \in \mathbb{K}^n, \ S = \{x_0\} \subset \mathbb{K}^n$.
2. Si $r < n$, alors
   (a) si le système est incompatible, alors $S = \emptyset$
   (b) sinon, $\mathcal{S}$ a une infinité de solutions paramétrées par $n - r$ paramètres

Démonstration :
On note A la matrice du système. La première remarque est que comme $r \leq \min(n, p)$, pour avoir $r = n$, cela nécessite d'avoir $n \leq p$. On a donc moins d'inconnues que d'équations.

1. On suppose donc que $\operatorname{rg} A = r = n$. Donc A est équivalente par ligne à une matrice $\begin{pmatrix} T & * \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 0_{p-r,r} \end{pmatrix}$. Et comme $\operatorname{rg} A = r = n = \operatorname{rg} T$, les éléments de la diagonale de T sont non nuls. Donc la matrice T est inversible. Et on a

$$(\mathcal{S}) \iff AX = B \iff \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} X = B' \iff TX = C$$

où $C = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$ sont les n premiers éléments de la colonne B' et B' est la matrice obtenue à partir de B en faisant le opérations élémentaires sur les lignes qui permettent de passer de la matrice A à la matrice $\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$. Si le système est incompatible, il n'y a rien à faire. Dans l'autre cas, les éléments b'_{n+1} à b'_p sont tous nuls puisque le système est supposé compatible.

Mais la matrice T est inversible puisque sa diagonale n'a que des éléments non nuls. Donc $X = T^{-1}C$ est l'unique solution du système.

2. On notera que l'on doit avoir $r \leq p$ et $r < n$. On va commencer par le cas $r = p < n$ pour comprendre ce qu'il se passe et on va généraliser ensuite au cas $r < \min(p, n)$. Si $r = p < n$, alors on a un système de la forme
$$\begin{pmatrix} T & * \end{pmatrix} X = B'$$
On a donc
$$\begin{aligned} & \forall k \in \{1, \dots, p\},\ \sum_{j=k}^{n} a_{k,j} x_j = b'_k \\ \iff & \forall k \in \{1, \dots, p\}, \sum_{j=k}^{p} a_{k,j} x_j = b'_k - \sum_{j=p+1}^{n} a_{k,j} x_j \\ \iff & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 - \sum_{j=p+1}^{n} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ b'_p - \sum_{j=p+1}^{n} a_{p,j} x_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
On retombe dans le cas précédent. Une fois les $n - p = n - r$ dernières variables fixées, on obtient donc une unique solution. Donc l'ensemble des solutions est paramétré par les $n - r$ dernières variables.

On se place maintenant dans le cas général où $r < p$ et $r < n$. On a donc un système de la forme
$$\begin{pmatrix} T & * \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix} X = B'.$$
Tout d'abord, si $\exists k \in \{r+1, \dots, p\}$ tel que $b'_k \neq 0$, alors le système est incompatible et donc $S = \emptyset$. Si le système est compatible (donc si $\forall k \in \{r+1, \dots, p\}$, $b'_k = 0$), les $n - r$ dernières lignes ne sont composées que de 0 et on peut donc les enlever sans rien changer au système. On se ramène dont au système
$$\begin{pmatrix} T & * \end{pmatrix} X = B''$$
où $B'' \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ ne contient que les r composantes de B'. Et on est ramené au cas précédent. Donc S est infini paramétré par $n - r$ paramètres.

□

Donc en résumé, et en réordonnant un peu les choses, pour résoudre un système, il faut le triangulariser et ensuite observer dans l'ordre :

- Si $(\mathcal{S})$ est incompatible, alors $S = \emptyset$.
- Sinon :
  - Si $r = n$, alors $S = \{x_0\}$, le système n'a qu'une seule solution.

- Si $r < n$, alors S a une infinité de solutions.

Remarque :
Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est la matrice d'un système $\mathcal{S}$, et si $\mathrm{rg}(\mathcal{S}) = p$, alors $\mathcal{S}$ est obligatoirement compatible.

Remarque :
Donc, une fois mis sous forme triangulaire :

- les r lignes contenant un pivot sont les lignes qui donnent les "inconnues principales" qui permettent "vraiment" de résoudre le système.
- les $n - r$ colonnes restantes indiquent les "inconnues secondaires" qui sont les paramètres.
- les $p - r$ lignes restantes correspondent aux lignes de "bonne compatibilité" déterminant si le système a des solutions ou non.

Définition 2.2 (Système de Cramer) :
Soit $(\mathcal{S})$ un système de p équations à n inconnues de rang r.
Si $n = p$ et $r = n$, on dit alors que $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer.

Autrement dit, un système de Cramer est un système dont la matrice est carré et inversible (ou de rang n).

Proposition 2.8 (Solutions d'un système de Cramer) :
Un système de Cramer admet une unique solution.

Démonstration :
Corollaire de ce qu'il y a plus haut. □

2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Définition 2.3 (Système homogène) :
On appelle système d'équations linéaires homogène tout système de la forme $AX = 0$ écrit sous sa forme matricielle.

Si $(\mathcal{S})$ $AX = B$ est un système d'équations linéaires sous sa forme matricielle, on appelle système d'équations linéaires homogène associé à $(\mathcal{S})$ le système $AX = 0$.

Proposition 2.9 (Structure de l'ensemble des solutions) :
Soit $(\mathcal{S})$ un système de p équations linéaires à n inconnues compatibles de rang r et $(\mathcal{S}_h)$ le système linéaire homogène associé à $(\mathcal{S})$. Soit $x_0 \in \mathbb{K}^n$ une solution particulière de $(\mathcal{S})$. On note S l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ et S_h l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}_h)$.

Alors S_h est un sev de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - r$ et $S = x_0 + S_h$.

Ici, bien sûr, il faut comprendre

$$S = \{x_0 + h, h \in S_h\}$$

Démonstration :
On note le système $(\mathcal{S})$ matriciellement $AX = B$. Donc

$$\begin{aligned}
x \in S &\iff AX = B = AX_0 \\
&\iff A(X - X_0) = 0 \\
&\iff X - X_0 \in S_h \\
&\iff \exists h \in S_h,\ x = x_0 + h
\end{aligned}$$

D'où l'égalité entre les deux ensembles.
D'autres part, $S_h = \ker A$ donc c'est un $\mathbb{K}$-ev. □

On verra une méthode un peu particulière pour résoudre les systèmes de Cramer un peu plus tard dans le prochain chapitre sur les déterminants.

Exemple 2.2 :
Résoudre les systèmes

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x + 2y + 2t = 2 \\ -x + 2z + t = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_2)\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_3)\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases}$$

2.3 Lien avec l'algèbre linéaire

Si on considère un système linéaire $(\mathcal{S})AX = B$ sous sa forme matricielle, on peut donc considérer les éléments d'algèbre linéaire canoniquement associé à ces matrices. Autrement dit, si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on peut considérer l'application $f \in \mathcal{L}(K^n, \mathbb{K}^p)$ canoniquement associée à A, $b \in \mathbb{K}^p$ et $x \in \mathbb{K}^n$ dont les matrices sont respectivement B et X. Si on note également S l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$,

$(\mathcal{S}_h)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$, S_h l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}_h)$ on peut alors réécrire les choses sous une forme vectorielle par

$$X \in S \iff AX = B \iff f(x) = b \iff x \in f^{-1}(\{b\})$$

De ce point de vue, on voit que le système est compatible si et seulement si $b \in \operatorname{Im} f$, que si x_0 est un antécédent de b par f, alors les solutions du systèmes sont les $x_0 + \ker(f)$.

On peut donc voir un système aussi d'un point vectoriel et recoller avec les chapitres précédents (notamment avec les rangs, dimensions etc).

3 Applications

On peut faire beaucoup de choses avec les systèmes. En soit, ils n'ont pas grand intérêts. C'est la façon dont on les utilises, le contexte et leur sens qui les rend très utiles. C'est ce que veux dire dans le contexte dans lequel on résout le système qui les rends très puissants. Ils permettent de résoudre des problèmes difficiles ou d'avoir des informations a priori inaccessible en résolvant simplement quelques équations faciles. Mais les équations en elles-mêmes n'ont pas grand d'intérêt.

Dans son utilisation principale, les systèmes permettent de résoudre des équations vectorielles de la forme $f(x) = b$, ce qui sera indispensable en deuxième année pour déterminer des vecteurs propres associés à une valeur propre d'une matrice pour trouver une base composée de vecteurs propres de la matrice afin de diagonaliser (ou à défaut triangulariser la matrice). C'est les 3 premières questions de tout exercices d'algèbre linéaire.

Antre autre chose, et essentiellement pour nous cette année, on pourra retenir le résumé d'utilisation des système linéaire suivant (et sa version vectorielle) :

Théorème 3.1 (Caractérisation d'une matrice inversible par les systèmes) :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

(ii) $A \underset{L}{\sim} I_n$

(iii) Le système $AX = 0$ n'admet qu'une seule solution qui est la solution nulle.

(iv) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

(v) $\forall\ B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.

(vi) $\forall\ B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Démonstration :
On sait déjà tous ça. C'est éparpillés dans les 3 chapitres précédents (celui ci compris). □

Exemple 3.1 :
On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ qui a un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de $(1 + 2X - X^2 + X^3)P(X) - \widetilde{P}(0) - \widetilde{P}(1)$ par $X^4 + X^2 + 1$.

Montrer que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, donner la matrice de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et résoudre le système $\varphi(P) = Q$. Que peut-on en déduire pour l'application φ ?

Exemple 3.2 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathrm{rg}(M)$
2. Déterminer $\ker(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$