Chapitre 21 - TD
Systèmes Linéaires

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

18 mars 2025

1 Résolution de système

Exercice 1 :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ ax + 3y = b \end{cases}$$

Interpréter géométriquement les résultats obtenues.
Faire de même avec le système

$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = b \end{cases}$$

Exercice 2 :
Déterminer les matrices échelonnées équivalente par ligne aux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :
Résoudre les systèmes suivants

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 3t = 1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 1 \\ -x + y + 7z + 2t = 1 \\ 2x + y - 8z + t = a \end{cases}$$

Exercice 4 :
Résoudre les systèmes suivants

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases}2x+3y-z=-1\\ x+2y+3z=2\\ 3x+4y-5z=-4\end{cases}\qquad (\mathcal{S}_2)\begin{cases}3x+4y+z+2t=3\\ 6x+8y+2z+6t=7\\ 9x+12y+3z+10t=0\end{cases}$$

Exercice 5 :
Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ le système

$$\begin{cases}xyz=1\\ xy^2z^4=2\\ xy^3z^9=3\end{cases}$$

Exercice 6 :
Résoudre le système

$$\begin{cases}x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\cdots+\ \ x_n=1\\ x_1+2x_2+2x_3+\cdots+2x_n=1\\ x_1+2x_2+3x_3+\cdots+3x_n=1\\ \qquad\qquad\vdots\\ x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=1\end{cases}$$

Exercice 7 :
Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres m, a, b

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases}x+y+(2m-1)z=1\\ mx+y+z=1\\ x+my+z=3(m+1)\end{cases}\qquad (\mathcal{S}_2)\begin{cases}x-my+m^2z=m\\ mx-m^2y+mz=1\\ mx+y-m^3z=1\end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3)\begin{cases}2x+y+z+t=3\\ x+2y+z+t=1\\ x+y+2z+t=2\\ x+y+z+2t=4\\ 4x-3y+3z-4t=a\\ 2x+7y+7z+2t=b\end{cases}$$

Exercice 8 (**) :
Déterminer les couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que le système suivant n'admette qu'une unique solution :

$$\begin{cases}x+y=1\\ ax+by=1\\ a^2x+b^2y=2\\ a^3x+b^3y=3\end{cases}$$

Exercice 9 :
Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ avec $a\neq b$. Montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide si et seulement

si $c \in \{a, b\}$.

$$\begin{cases} x + ay + z + bt = 1 \\ ax + a^2y + bz + b^2t = c \\ a^2x + a^3y + b^2z + b^3t = c^2 \end{cases}$$

Exercice 10 :
Déterminer le rang des systèmes homogènes associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 9 & 11 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 :
On considère les sev de $\mathbb{R}^3$ dépendant d'un paramètre $m \in \mathbb{R}$ par

$$F_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + my + z = 0, mx + y - mz = 0\}$$

et

$$G_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - my + z = 0\}$$

1. Déterminer la dimension de F_m et G_m en fonction de m.
2. Déterminer la dimension de $F_m \cap G_m$ en fonction de m.

Exercice 12 :
Résoudre les systèmes suivants en fonction du paramètre m.

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = 1 + m \end{cases}$$

Exercice 13 :
Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 14 (CCINP 2021) :
Soit $(a, m) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système et discuter en fonction des valeurs de a et m :

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ x - 3my + az = -1 \\ 5x + (3-m)y + mz = a \end{cases}$$

Exercice 15 :
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le nombre de solutions en fonction du paramètre λ du système $AX = \lambda X$. Pour quelles valeurs de λ ce système est-il un système de Cramer ?
2. Résoudre le système $AX = \lambda X$ pour toutes les valeurs de λ pour lesquelles ce système n'est pas un système de Cramer.
3. Montrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux solutions des systèmes de Cramer de la question précédentes forment une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Si f est l'application linéaire canoniquement associé à A, écrire la matrice de f dans cette nouvelle base.
5. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 (Trigonalisation) :
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système $AX = \lambda X$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 (Trigonalisation **) :
Soit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à M.

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $MX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $MX = X$. On nommera e_1 un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle relativement à la base canonique est solution de cette équation.
3. Résoudre le système $MX = 2X + Y$ selon les valeurs de $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ce système a des solutions lorsque Y est la matrice de e_1. On appellera e_2 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle est solution de ce système.
4. Montrer que le système $MX = -X + Y$ a des solutions si et seulement si Y est dans un hyperplan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont on donnera une équation. Vérifier que la colonne représentative de $2e_1 - e_2$ est dans cet hyperplan. On appellera e_3 un vecteur solution de ce système.

5. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. On appelle P la matrice représentative de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique. Calculer $P^{-1}MP$. Calculer alors M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\exists Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que l'équation $AX = Y_0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution X_0.

Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution.

2 Inversion de matrices

Exercice 19 :
Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 20 :
Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ -7 & -9 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 :
Inverser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 22 :
Discuter l'inversibilité des matrices suivantes en fonction des paramètres

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 (***) :
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de f. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Donner une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer l'image réciproque par f de l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x - y + z - 2t = 0$ dans la base canonique.