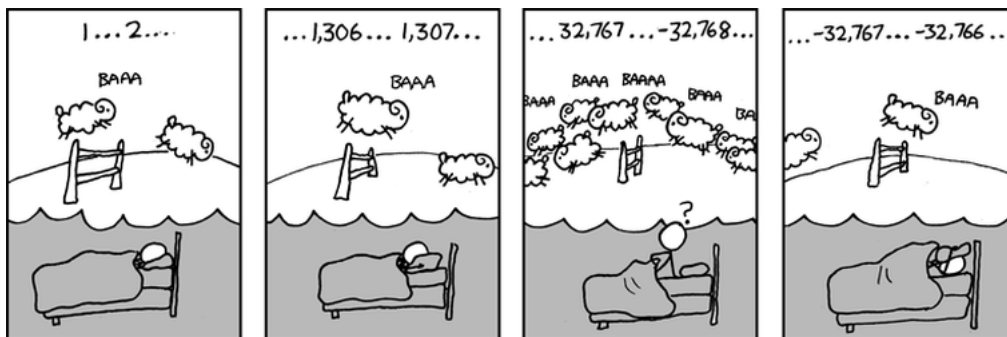


Chapitre 22

Ensembles finis, Dénombrement

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

25 mars 2025



La combinatoire est le domaine des mathématiques qui consiste à compter le nombre de façons d'agencer des choses. Les problèmes de dénombrement sont essentiellement des problèmes de comptage. Avec suffisamment de temps et assez de doigts, il n'y en aurait pas. Mais comme nous n'avons que 10 doigts et que notre vie n'est pas infini, il faut étudier les agencements autorisés pour essayer de compter plus efficacement.

Les premières questions de dénombrement apparaissent dès l'antiquité sur le nombre de façons de mettre des parenthèses dans une suite de 10 éléments. L'essor de la combinatoire se fait au XVII^{ème} siècle avec Blaise Pascal et Pierre de Fermat et coïncide au début du développements des probabilités.

En effet, l'essence même des probabilités discrètes consiste à donner le rapport entre le nombre d'issues favorables d'un événement donné par rapport au nombre d'issues total. Il faut donc compter le nombre de façon de faire quelque chose. Et c'est à ce moment que la combinatoire apparaît.

Ce chapitre est donc une sorte de prémisse, d'introduction au chapitre de probabilité qui suivra un peu plus tard.

Mais la combinatoire ne sert pas que pour les probabilités. C'est un domaine qui est utilisé souvent dans des questions un peu isolé dans beaucoup d'autres problèmes. La combinatoire est très liée aussi à d'autres domaines des mathématiques comme la théorie des graphes par exemple.

The possibilities of the art of combination are not infinite, but they tend to be frightful.

Jorge Luis Borges

Table des matières

1 Cardinal	2
1.1 Généralités	2
1.2 Sous-ensemble d'un ensemble finis	8
1.3 Cardinal et Opérations	9
2 Cardinal et Applications	13
2.1 Cardinal et Ensemble d'Applications	13
2.2 Permutations	17
2.3 Combinaisons, Arrangements, p -listes	18
2.4 Rappels sur les coefficients binomiaux	21

1 Cardinal

1.1 Généralités

On rappelle que les axiomes de Peano (voir chapitre sur les relations d'ordres) nous donne quelques propriétés utiles sur les entiers :

Théorème 1.1 (\mathbb{N} est un ensemble bien ordonné) :

On a les propriétés suivantes :

- (i) Tout sous-ensemble non vide de \mathbb{N} admet un minimum. (\mathbb{N} est bien ordonné)
- (ii) Tout sous-ensemble non vide et majoré de \mathbb{N} admet un maximum.
- (iii) Tout sous-ensemble fini non vide de \mathbb{Z} admet un maximum et un minimum.
- (iv) Tout sous-ensemble non vide et minoré (resp. majoré) de \mathbb{Z} admet un minimum (resp. un maximum).

Nous utiliserons donc ce résultat.

Lemme 1.2 :

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

- (i) Si il existe une injection $f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, alors $p \leq n$.
- (ii) Toute injection de $\{1, \dots, n\}$ dans lui même est une bijection.
- (iii) Il existe une bijection de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ si, et seulement si, $n = p$.

Démonstration :

- (i) et (ii) On va faire une démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour prouver les deux premiers points en même temps. On va donc montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ injective $\implies p \leq n$).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $\exists f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1\}$ injective. Alors, en particulier, on a $f(1) = 1 = f(p)$. L'injectivité nous donne alors $p = 1$. Et donc dans ce cas là, f est également bijective.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ si il existe $f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ injective, alors $p \leq n$ et que si $p = n$ alors f est bijective.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$ injective. Si $p = 1$, alors $p \leq n+1$. Supposons désormais $p \geq 2$.

Sans perte de généralités, on peut supposer que $f(p) = n+1$. En effet, si $f(p) \neq n+1$, on peut considérer $\sigma : \{1, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, \sigma(i) = i$ et $\sigma(n+1) = f(p)$ et $\sigma(f(p)) = n+1$. Autrement dit, σ est la permutation de $\{1, \dots, n\}$ échangeant $f(p)$ et $n+1$. Il est facile de montrer que $\sigma^2 = \text{Id}_{\{1, \dots, n\}}$. Donc σ est une bijection.

On pose alors $\tilde{f} = \sigma \circ f$. Alors $\tilde{f} : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$ est une injection par composée d'injection et de plus $\tilde{f}(p) = \sigma(f(p)) = n+1$. Donc, quitte à composer par une bijection, on peut supposer sans perte de généralités que $f(p) = n+1$.

On considère $\varphi : \{1, \dots, p-1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ définie par $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}, \varphi(i) = f(i)$ (donc φ est la double restriction au départ et à l'arrivée de f). Alors φ est injective. Et donc, par principe de récurrence, $p-1 \leq n$. Donc $p \leq n+1$.

De plus, si $p = n+1$, quitte à composer toujours par σ , $f : \{1, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$ est injective et $f(n+1) = n+1$. Alors φ est toujours injective et l'hypothèse de récurrence nous assure que φ est une bijection. Et donc f l'est également

- (iii) Si $p = n$, on peut prendre l'identité qui est une bijection de $\{1, \dots, p\}$ sur $\{1, \dots, n\} = \{1, \dots, p\}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $f : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijective. Alors f est injective et donc, d'après le premier point, $p \leq n$. De plus, $f^{-1} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$ est également injective, donc $n \leq p$. Et donc $n = p$.

□

Définition 1.1 (Ensemble fini) :

Soit E un ensemble.

On dit que E est *un ensemble fini* si $E = \emptyset$ ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow E$.

Remarque :

Une telle bijection fournit alors un “étiquetage” des éléments de E : si $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow E$ est une bijection, on peut noter $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = f(i) \in E$. Alors $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ où les x_i sont deux à deux distincts par injectivité de f .

En considérant une autre bijection $g : \{1, \dots, n\} \rightarrow E$, on obtient alors un autre “étiquetage” des éléments de E : en posant $\forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i = g(i)$, on obtient $E = \{y_1, \dots, y_n\}$ avec $y_i \neq x_i$ a priori. En revanche, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i = g \circ f^{-1}(x_i)$.

Par bijectivité de f et g , les étiquetages donnent donc bien les mêmes éléments, mais pas dans le même ordre : $g^{-1} \circ f$ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, c'est donc une permutation des éléments.

Définition 1.2 (Cardinal, Ensemble infini) :

Soit E un ensemble.

- Si E est fini, son nombre n d'éléments est appelé *cardinal* de E et est noté $\#E$, $\text{Card}(E)$ ou encore $|E|$. Par convention, $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
- Un ensemble qui n'est pas fini est un *ensemble infini*. Dans ce cas, on notera $\text{Card}(E) = +\infty$.

Remarque :

La notion d'ensemble fini correspond à la définition intuitive que l'on peut en donner. Un ensemble est fini s'il a un nombre fini d'éléments. Et dans ce cas, le cardinal correspond à la notion intuitive du nombre d'éléments de E .

Remarque :

Il est recommandé d'utiliser préférentiellement la notation Card qui est plus claire et moins ambiguë. Toutefois, dans les formules, par des soucis de densité, pour que les expressions ne soient pas trop longues ou pour alléger les notations, il peut être plus judicieux d'utiliser la notation $|E|$. C'est en tous cas le principe que j'utiliserais.

Exemple 1.1 :

Si $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ est un ensemble fini à n éléments. Donc $\text{Card}(\{1, \dots, n\}) = n$.

Proposition 1.3 (Unicité du cardinal) :

Soit E un ensemble fini.

Alors le cardinal de E est unique (i.e. $\exists! n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une bijection $\{1, \dots, n\} \rightarrow E$).

Cette proposition semble assez triviale. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini est unique. Un

ensemble ne peut pas contenir deux nombres différents d'éléments.

Intuitivement, peu importe la façon dont on compte les éléments de E , peu importe la façon dont on les numérote, on aura toujours besoin du même nombre d'étiquettes. Le nombre d'étiquettes nécessaire pour numéroter les éléments de E ne dépend pas de la façon dont on colle les étiquettes. Ce qui est heureux.

Démonstration :

La démonstration est contenu dans une remarque au dessus : soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow E$ et $\psi : \{1, \dots, m\} \rightarrow E$ deux bijections. Alors $\varphi^{-1} \circ \psi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ est bijection. Mais d'après la première propriété, on en déduit $n = m$.

D'où l'unicité (et donc la bonne définition) du cardinal. \square

Remarque :

Cette proposition justifie donc a posteriori le choix de la définition et de la notation pour le cardinal. On peut donc bien parler DU cardinal d'un ensemble donné. C'est LE cardinal et pas un cardinal. Il est unique. Il suffit de compter.

Définition 1.3 (Ensembles équipotents) :

Soit E et F deux ensembles.

On dit que E et F sont équipotents s'il existe une bijection entre E et F .

Proposition 1.4 (Propriétés des ensembles équipotents) :

Soit E et F deux ensembles finis.

Alors E et F sont équipotents si et seulement si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Démonstration :

Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$, on pose $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow E$ et $\psi : \{1, \dots, n\} \rightarrow F$ deux bijections (des "étiquetages"). Alors $\psi \circ \varphi^{-1} : E \rightarrow F$ est une bijection. Et donc E et F sont bien équipotents.

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Soit $n = \text{Card}(E)$ et $p = \text{Card}(F)$. Soit $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow E$ et $\psi : \{1, \dots, p\} \rightarrow F$ des "étiquetages". Alors $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$ est une bijection. Et donc $n = p$. \square

Remarque :

Pour les ensembles finis, deux ensembles équipotents sont donc deux ensembles de même cardinal.

Définition 1.4 (Ensemble dénombrable) :

Soit E un ensemble.

On dit que E est *dénombrable* si il existe une bijection entre \mathbb{N} et E .

Remarque :

La notion d'ensemble dénombrable n'est pas très claire et pas fixé. Il existe deux définitions qui dépendent un peu de notre centre d'intérêt. Certains considèrent les ensembles dénombrables comme seulement des ensembles infinis (donc en bijection avec \mathbb{N}) ; d'autres considèrent que les ensembles finis sont aussi dénombrables. La première version est plus exclusive mais à l'avantage de se restreindre aux seuls cas intéressants en pratiques dans ce genre de questionnement : les ensembles infinis. En effet, on va voir que les ensembles finis sont assez rigides. En revanche, les ensembles infinis sont beaucoup plus "mous" et donc plus difficiles à étudier (donc plus intéressants). Les exclure permet de restreindre seulement aux cas intéressants en enlevant les cas "triviaux". Mais bien sûr, en contre partie, on omet d'office des énoncés des cas qui pourtant vérifient les propriétés. Il peut être utile d'avoir les énoncés les plus généraux possibles et donc qui englobent le plus de cas possible. Autrement dit, avoir un énoncé (et donc ici une définition la plus englobante possible) le rend utile dans plus de situation, plus général et donc meilleur.

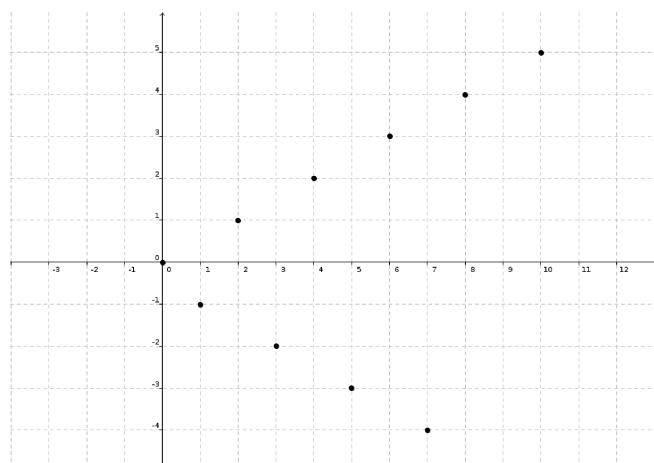
Il est donc possible que vous trouviez des cas (énoncés, sujets, livres, etc) dans lesquels la notion d'ensembles dénombrables englobent les ensembles finis. La différence provient de là.

Exemple 1.2 :

Montrer que tout sous-ensemble infini de \mathbb{N} est dénombrable.

Exemple 1.3 :

Montrer que \mathbb{Z} est dénombrable.



Proposition 1.5 :

\mathbb{N} , \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont dénombrables. \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Démonstration :

Pour \mathbb{N} et \mathbb{Z} , c'est assez évident.

La dénombrabilité de \mathbb{Q} est un problème classique qui peut se faire dès le chapitre sur les ensembles et applications en démontrant le théorème de Cantor-Bernstein. On montre qu'on peut fabriquer une injection de \mathbb{N} dans \mathbb{Q} (ce qui est triviale) et une injection de \mathbb{Q} dans \mathbb{N} (ce qui l'est un peu moins). Le théorème de Cantor-Bernstein assure alors l'existence d'une bijection entre ces deux ensembles.

Pour montrer que \mathbb{R} n'est pas dénombrable, on peut utiliser l'argument de la diagonale descendante de Cantor (c'est l'argument le plus classique, mais pas la seule façon de faire). Pour ça, comme $]0, 1[$ est en bijection avec \mathbb{R} (avec l'arctan ou th par exemple), il suffit de montrer que $]0, 1[$ n'est pas dénombrable. On raisonne par l'absurde. On suppose $]0, 1[$ est dénombrable. On nomme alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les éléments de $]0, 1[$ par ordre strictement croissant. Alors chaque x_k peut s'écrire sous forme décimale infinie (avec une infinité de 0 éventuellement). Donc $x_k = 0, x_{k,1}x_{k,2}x_{k,3} \dots$. On fabrique alors $x = 0, r_1r_2r_3 \dots$ avec $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $r_k \in \{1, 2\} \setminus \{x_{k,k}\}$. Alors $x \in]0, 1[$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x \neq x_k$ puisque toutes les décimales de x sont non nulles (on peut utiliser l'unicité de l'écriture décimale d'un réel grâce à ça). On vient donc de fabriquer un élément de $]0, 1[$ qui n'est pas dans la liste des éléments de $]0, 1[$. Donc \blacksquare . Et donc $]0, 1[$ ne peut pas être dénombrable. Donc \mathbb{R} non plus. \square

Remarque :

Cet argument est le point de départ de l'hypothèse du continu et de la théorie des ordinaux (i.e. de "de la classification des infinis"). Il y a différente "taille" d'infinis : si on appelle \aleph_0 la taille d'infini de \mathbb{N} , alors on vient de voir que \mathbb{R} a une infinité "beaucoup plus grosse" d'éléments que \mathbb{N} . On peut alors nommer \aleph_1 la "taille d'infini" de \mathbb{R} . On appelle ces éléments des ordinaux (ce sont, en quelques sortes, les "cardinaux" pour les ensembles infinis).

Définition 1.5 (Ensemble discret) :

Soit E un ensemble.

On dit que E est discret s'il existe une injection de E dans \mathbb{N} .

Remarque :

En particulier, si E est fini, il y a une bijection (donc une injection) entre E et un sous-ensemble borné de \mathbb{N} . Et donc il y a une injection de E dans \mathbb{N} .

Dit autrement, un ensemble discret est un ensemble dans lequel on peut "distinguer" tous les éléments, on peut différencier les éléments les uns des autres. Moralement, un ensemble discret est un ensemble dans lequel il y a de l'espace entre deux points distincts. On peut les séparer. C'est d'ailleurs

ce que fait une injection dans \mathbb{N} : l'injection permet de séparer les images d'éléments distincts au départ et, dans \mathbb{N} , les entiers sont distants les uns des autres.

1.2 Sous-ensemble d'un ensemble finis

Proposition 1.6 (Cardinal et sous-ensemble [✓]) :

Soit E un ensemble fini et $F \subset E$.

Alors F est fini et $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$, avec égalité ssi $E = F$.

Intuitivement, un sous-ensemble consiste à ne sélectionner certains éléments d'un ensemble donné. On ne considère pas tous les éléments d'un ensemble. Si l'ensemble de départ ne contient qu'un nombre fini d'éléments, on ne peut donc qu'en sélectionner un nombre fini. Et en moins grande quantité. Autrement dit, un sous-ensemble d'un ensemble fini est encore fini et contient forcément moins d'éléments. Sauf si l'on a sélectionné tous le monde, évidemment.

Démonstration :

Si $F = \emptyset$, c'est terminée. Supposons $F \neq \emptyset$.

On pose $n = \text{Card}(E)$. Donc il existe une bijection f de E dans $\{1, \dots, n\}$. On a alors $f|_F$ bijection de F sur $f(F)$. Mais $f(F)$ est un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$, donc il est fini car majorée (et axiomes de Péano) et il existe $m \leq n$ et une bijection $g : f(F) \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Par conséquent, $g \circ f$ est une bijection de F sur $\{1, \dots, m\}$ et donc F est fini et de cardinal m .

Si on appelle j l'injection canonique $j : F \rightarrow E$, alors $f \circ j \circ f^{-1} \circ g^{-1} : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ est une injection. Et donc $m \leq n$.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} & \{1, \dots, n\} \longleftarrow \{1, \dots, m\} \\
 \uparrow j & & \uparrow \\
 F & \xrightarrow{f} & f(F) \xrightarrow{g} \{1, \dots, m\}
 \end{array}$$

Il est clair que si $m = n$, on a $f(F) = \{1, \dots, n\}$ et donc $F = E$ puisque f est bijective. La réciproque est triviale. \square

Exemple 1.4 :

Montrer que, si E est fini et $A \subset E$, alors

$$\text{Card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x).$$

Proposition 1.7 (Caractérisation des parties finies de \mathbb{N} [✓]) :

Soit $A \subset \mathbb{N}$.

A est finie si, et seulement si, A est majorée.

Démonstration :

On sait que A est minorée par 0 puisque $A \subset \mathbb{N}$. Si A est majoré par $N \in \mathbb{N}$, alors $A \subset \llbracket 0, N \rrbracket$ et donc A est finie. La réciproque est évidente. \square

1.3 Cardinal et Opérations**Proposition 1.8 (intersection avec un ensemble fini) :**

Soit E un ensemble (quelconque), $A, B \subset E$.

Si A ou B est fini, alors $A \cap B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cap B) \leq \min(\text{Card}(A), \text{Card}(B)).$$

Démonstration :

Sans perte de généralités et quitte à renommer les ensembles A et B , on peut supposer que A est fini. Alors $A \cap B$ est un sous-ensemble d'un ensemble fini. Donc $A \cap B$ est fini et $\text{Card}(A \cap B) \leq \text{Card}(A)$.

Si B est infini, la majoration est évidente, sinon, $A \cap B$ est également un sous-ensemble de B et donc on a l'autre inégalité. \square

Proposition 1.9 (Cardinal d'une réunion disjointe) :

Soit A et B deux ensembles finis disjoints.

Alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Démonstration :

On appelle $a = |A|$ et $b = |B|$ et $\alpha : A \rightarrow \{1, \dots, a\}$ et $\beta : B \rightarrow \{1, \dots, b\}$. On construit alors $f : A \cup B \rightarrow \{1, \dots, a + b\}$ par $f(x) = \alpha(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = a + \beta(x)$ si $x \in B$ (i.e. $f = \mathbb{1}_A \alpha + \mathbb{1}_B (a + \beta)$). Il suffit donc de montrer que f est bijective. f est clairement surjective. En effet, si on prend $n \leq a$, $f^{-1}(\{n\}) = \alpha^{-1}(\{n\}) = \{\alpha^{-1}(n)\}$ et si $a + 1 \leq n \leq a + b$, $f^{-1}(\{n\}) = \beta^{-1}(\{n - a\}) = \{\beta^{-1}(n - a)\}$ (on vient par la même occasions de montrer qu'elle est bijective d'un seul coup, mais faisons comme si on avait pas vu). Il reste à montrer qu'elle est

injective. Soit donc x et y dans $A \cup B$ tels que $f(x) = f(y)$. Si $f(x) \leq a$, par bijectivité de α , on sait que $x = y$. Si $f(x) \geq a + 1$, c'est la bijectivité de β qui va nous donner $x = y$ et donc f est injective. Donc elle est bijective. \square

Proposition 1.10 (Partition d'un ensemble fini) :

Soit E un ensemble fini et $A \in \mathcal{P}(E)$.

Alors (A, \bar{A}) forme une partition de E et

$$\text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E).$$

Démonstration :

Le fait qu'on a une partition de E est connu depuis le chapitre sur les ensembles. C'est évident par définition. Et comme A et \bar{A} sont tous les deux finis et disjoints, la propriété précédente nous donne le résultat. \square

Proposition 1.11 (Cardinal d'une différence) :

Soit A, B deux ensembles finis.

Alors $A \setminus B$ est fini et de plus,

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B).$$

Démonstration :

Il est clair que $A \setminus B$ est un sous-ensemble de A , donc il est fini. Et $\text{Card}(A) = \text{Card}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(A \cap B)$ ce qui nous donne le résultat. \square

Remarque :

Ce qui redonne, en particulier, le cardinal du complémentaire d'une partie d'un ensemble fini : si E est un ensemble fini à n éléments, et A une partie de E , alors $\text{Card}(\bar{A}) = n - \text{Card}(A)$.

!!! ATTENTION !!!



En toute généralité, $\text{Card}(A \setminus B) \neq \text{Card}(A) - \text{Card}(B)$! En effet, prendre $A = \{2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$.

Proposition 1.12 (Cardinal et réunion [✓]) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soient A et B deux ensembles finis, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis et

$$\text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

2. Si A_1, \dots, A_n sont n ensembles finis et disjoints 2 à 2 (i.e. tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), alors $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est fini et

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$$

Remarque :

On notera l'analogie avec les applications linéaires. En fait, la dimension est aux espaces vectoriels ce que le cardinal est aux ensembles finis. On aura l'occasion de revoir cette analogie à plusieurs reprises. Ici, particulièrement, on notera la similarité avec la formule de Grassmann.

Cette analogie était prévisible : la dimension revient à compter le nombre de vecteurs d'une base qui est un ensemble fini. Toutes les propriétés avec les dimensions se traduisent en terme de manipulations sur des ensembles finis de vecteurs (les bases) et compter (donc donner le cardinal) les vecteurs.

Démonstration :

1. On note $a = \text{Card}(A)$ et $b = \text{Card}(B)$. On considère la différence symétrique $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (cf. exos du chapitre Ensembles et Applications). On a $A \Delta B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B))$. Or $(A \setminus (A \cap B)) \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$. Donc $\text{Card}(A \Delta B) = \text{Card}(A \setminus (A \cap B)) + \text{Card}(B \setminus (A \cap B)) = (a - \text{Card}(A \cap B)) + (b - \text{Card}(A \cap B)) = a + b - 2 \text{Card}(A \cap B)$

D'autres parts, on a aussi de façon évidente $A \cup B = ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$ et ces deux ensembles sont clairement disjoints, donc $\text{Card}(A \cup B) = a + b - 2 \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap B) = a + b - \text{Card}(A \cap B)$, d'où le résultat annoncé.

2. Cette démonstration est faite par récurrence et est laissée en exercice.

□

Remarque :

On pouvait faire la démo en écrivant

$$\text{Card}(A \cup B) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) + \sum_{x \in E} \mathbb{1}_B(x) - \sum_{x \in E} \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$$

en utilisant les propriétés sur les fonctions indicatrices.

Exemple 1.5 :

Si A, B, C sont des ensembles finis, déterminer $\text{Card}(A \cup B \cup C)$.

Remarque (dénombrement) :

Le cas du cardinal d'une réunion disjointe correspond à compter le nombre de situations avec une disjonction de cas.

Proposition 1.13 (Cardinal d'un produit cartésien [✓]) :

Soit E et F sont des ensembles finis.

Alors $E \times F$ est aussi fini et $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Démonstration :

On pose $n = \text{Card}(E)$ et $m = \text{Card}(F)$. On peut donc indexer les éléments de E par $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et de même pour F ($F = \{f_1, \dots, f_m\}$). Dans ce cas, $E \times F = \{(e_i, f_j), i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\} = \bigcup_{i=1}^n \{e_i\} \times F$. Chaque $\{e_i\} \times F$ est de cardinal m et il y en a exactement n de ces ensembles qui sont tous disjoints. Donc $\text{Card}(E \times F) = nm$. \square

Exemple 1.6 :

Calculer le cardinal de $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$.

Corollaire 1.14 :

Si E_1, \dots, E_n sont des ensembles finis, alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est fini et

$$\text{Card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \prod_{i=1}^n \text{Card}(E_i)$$

En particulier, on a $\text{Card}(E^n) = \text{Card}(E)^n$.

Démonstration :

C'est une récurrence par très dur qui est laissé en exercice. □

Remarque :

Le cas du cardinal d'un produit cartésien, correspond au dénombrement d'une situation que l'on peut scinder en plusieurs étapes, le nombre de choix à chaque étape étant fixe et constant pour tous les choix des étapes précédents.

2 Cardinal et Applications

2.1 Cardinal et Ensemble d'Applications

Proposition 2.1 (Caractérisation d'existence de surjections, injections, bijections [✓])

:

Soient E et F deux ensembles finis.

1. Il existe une injection de E dans F ssi $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.
2. Il existe une surjection de E dans F ssi $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.
3. Il existe une bijection de E sur F ssi $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Intuitivement, comme un injection "sépare" les images, on ne peut avoir une injection que s'il y a "suffisamment de place" à l'arrivée pour contenir que des images distinctes, une par élément de l'espace de départ. Et pour avoir une surjection, il faut que tous les éléments de l'ensemble d'arrivée soit atteint, donc il faut disposer de suffisamment d'élément au départ pour recouvrir tous l'espace d'arrivée. Et bien sûr, une bijection consiste en une injection et une surjection en même temps.

Démonstration :

Pour démontrer ce résultat proprement, il faudrait passer par diagrammes et des bijection entre E et $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Si $f : E \rightarrow F$ est une injection, alors $\forall x, y \in E$ avec $x \neq y$, on doit avoir $f(x) \neq f(y)$. Donc si on numérote $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ où $n = \text{Card}(E)$, alors on doit avoir $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_i) \neq f(e_j)$. Donc $f(E) = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\} \subset F$ et $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E) = n$. Donc $\text{Card}(F) \geq \text{Card}(E)$.
2. On peut procéder de la même manière pour la surjection. Si $f : E \rightarrow F$ est une surjection, alors $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a donc $f^{-1}(F) \subset E$ et $\text{Card}(f^{-1}(F)) \geq \text{Card}(F)$ par surjectivité. Donc $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.

3. E et F en bijection ssi E et F en injection et en surjection ssi $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$ et $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$ ssi $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

□

Corollaire 2.2 (Caractérisation des bijections entre ensembles finis [✓]) :

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \rightarrow F$ une application.

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

Démonstration :

On appelle n leur cardinal commun. Il est clair qu'il suffit de prouver que l'injectivité ou la surjectivité implique la bijectivité. Si f est injective, elle est une bijection de E sur $f(E) \subset F$. Donc $\text{Card}(E) = \text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$. Donc $f(E) = F$ car sous-ensemble de F de même cardinal. Donc f est surjective et donc elle est bijective.

Si on suppose maintenant que f est surjective. On sait que $\forall y \in F, |f^{-1}(\{y\})| \geq 1$. On a aussi clairement que $E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$ et cette réunion est disjointe. Donc $n = |E| = \sum_{y \in F} |f^{-1}(\{y\})|$. Or il y a n termes dans cette somme et ils sont tous non nulles. Donc nécessairement, chacun vaut 1, sinon il n'y aurait pas égalité (on additionne n nombres dont la somme vaut n . Donc si l'un d'entre eux vaut plus que 1, le résultat sera $> n$ et donc on aura pas égalité). Donc on a $|f^{-1}(\{y\})| = 1$ pour tout $y \in F$. Dit autrement, chaque élément d'arrivé possède un et un seul antécédent, i.e. $\forall y \in F, \exists !x \in E, f(x) = y$, i.e. f est bijective. □

Exemple 2.1 :

L'application $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, 2n\}$ définie par $f(x) = 2x$ est-elle injective? Surjective? Bijective?

Remarque :

On ne pourra pas s'empêcher de faire ici le rapprochement avec le théorème d'isomorphisme.

Proposition 2.3 (Cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$ [✓]) :

Soit E et F sont deux ensembles finis non vides.

Alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)} = |F|^{|E|}.$$

Démonstration :

Il suffit de le faire pour $E = \{1, \dots, n\}$ et $F = \{1, \dots, m\}$. Calculer le cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$ revient, par définition, à compter le nombre d'applications possible de E dans F . Or une applications $f : E \rightarrow F$ est définie par ce qu'elle vaut sur chacun des $k \leq n$. Or on a le choix entre m valeur pour chaque $f(k)$, donc on a en tout $\underbrace{m \times m \times \dots \times m}_{n \text{ fois}}$ choix possible à chaque fois avec n multiplication, i.e. m^n . □

Exemple 2.2 :

Calculer le cardinal de $\mathcal{F}(\{0, 1\}, \{0, 1, 2\})$ et $\mathcal{F}(\{0, 1, 2\}, \{0, 1\})$. Vous donnerez chacune de ces applications.

Remarque :

Toujours pareil, le parallèle avec l'algèbre linéaire est trop tentant pour ne pas en parler.

Exemple 2.3 :

Déterminer le nombre de façons de ranger p paires de chaussettes dans n tiroirs.

Corollaire 2.4 (Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ [✓]) :

Soit E un ensemble non vide fini. On a

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$$

Il y a essentiellement deux façons de démontrer cette proposition. L'une, plus combinatoire consiste à créer un ensemble à la main et compter toutes les possibilités. Pour ça, il faut d'abord décomposer les sous-ensembles suivant leurs cardinaux, puis, pour un cardinal fixé, dénombrer toutes les façons qu'il y a de faire un sous-ensemble de ce cardinal. Cette démo sera faite en exercice. On

donne une démonstration plus simple en terme de dénombrement et jolie sur le principe.

Démonstration :

On considère $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$. Par la proposition précédente, on sait que

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, \{0, 1\})) = 2^{\text{Card}(E)} .$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{P}(E)$ est en bijection avec $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$.

Soit $\Psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ définie par $\Psi(A) = \mathbb{1}_A$. Commençons par montrer que Ψ est injective. Soit donc $A, B \subset E$ tel que $\Psi(A) = \Psi(B)$. Donc $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. Or, par définition des fonctions caractéristiques, $x \in A \iff \mathbb{1}_A(x) = 1 \iff \mathbb{1}_B(x) = 1 \iff x \in B$. Donc $A = B$. Et donc Ψ est injective.

Soit maintenant une fonction $f : E \rightarrow \{0, 1\}$. On note $F = f^{-1}(\{1\})$. Par définition $F \subset E$. Il faut donc montrer maintenant que $\Psi(F) = \mathbb{1}_F = f$. On sait que $\mathbb{1}_F(x) = 1$ ssi $x \in F$. Mais $x \in F \iff f(x) = 1$. Donc $\mathbb{1}_F(x) = 1 \iff f(x) = 1$. Et donc, par raisonnement symétrique, $\mathbb{1}_F(x) = 0 \iff f(x) = 0$. D'où $\forall x \in E, \mathbb{1}_F(x) = f(x)$, donc $\mathbb{1}_F = f$ et donc $\Psi(F) = f$. Donc tout élément de $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ a un antécédent par Ψ et donc Ψ est surjective.

Ainsi Ψ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$. Ces deux ensembles ont donc le même cardinal et donc $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$. \square

Proposition 2.5 (Caractérisation des injections, surjections [✓]) :

Soit E et F deux ensembles finis. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On a alors les propriétés suivantes :

1. $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(F)$ avec égalité ssi f est surjective.
2. f surjective $\implies \text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.
3. $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(E)$ avec égalité ssi f est injective.
4. f injective $\implies \text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.

Démonstration :

1. On a $f(E) \subset F$, donc par la propriété 1.6, on a l'inégalité annoncé. Et par la même propriété, $|f(E)| = |F|$ ssi $f(E) = F$ ssi f est surjective par définition.
2. On suppose $n = \text{Card}(E) < \text{Card}(F) = m$. Par la propriété 2.1, on sait que f surjective $\implies n \geq m$. Si l'on suppose que f est surjective, on aurait donc une contradiction ($n < m$ par hypothèse et $n \geq m$ par la 2.1). Donc f ne peut pas être surjective. (c'est en fait la contraposée du sens direct du point 2 de 2.1)
3. Par définition, on sait que $\tilde{f} : E \rightarrow f(E)$ est surjective. Donc grâce au point précédent, $|E| \geq |f(E)|$.

D'autre part, si f est injective, \tilde{f} devient une bijection et on a donc l'égalité. Réciproquement, si $\text{Card}(E) = \text{Card}(f(E))$, alors \tilde{f} est bijective par caractérisations des bijections entre ensembles finis, ce qui nous donne l'injectivité de \tilde{f} et donc l'injectivité de f .

4. C'est la contraposée du sens direct du premier point de la propriété 2.1.

□

Remarque :

Là encore, il faut noter la ressemblance avec les cas des applications linéaires entre ev de dimensions finies.

2.2 Permutations

Définition 2.1 (Permutation) :

Soit E un ensemble fini. On appelle *permutation de E* toute bijection de E dans lui-même.

Pour avoir une bijection de E dans lui même, il faut donc remplacer chaque élément de E par un autre sans laisser de trou, en d'autres termes, ça revient donc à faire "tourner" les éléments de E , les changer simplement de place, les permuter.

Les permutations sont donc les bijections de $\mathcal{F}(E, E)$. Attention ! On rappelle que toute application de E dans lui même n'est pas nécessairement une bijection. Exactement comme pour les applications linéaires. Pour avoir une bijection, il est nécessaire sur l'espace de départ et d'arrivé ait le même cardinal, mais ce n'est pas une condition suffisante.

Proposition 2.6 (Nombre de permutations [✓]) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration :

Quitte à utiliser une bijection supplémentaire, on se ramène à étudier le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$.

On va prouver le résultat par récurrence. Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule bijection. C'est très clair.

Supposons que le nombre de permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ soit $n!$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On considère donc $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Construisons une permutations sur cet ensemble. Il faut donc commencer par envoyer 1 sur un élément de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On a $n+1$ choix possible pour faire cela.

Une fois le choix de l'image de 1 établit, il faut s'occuper des n éléments restants. On doit donc envoyer les éléments $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$, qui est un ensemble à n éléments, dans les n images disponibles qu'il reste (toutes celles qui ne sont pas l'image de 1 choisis afin de conserver l'injectivité). On doit donc

créer une bijection d'un ensemble à n éléments dans un autre ensemble à n éléments. Mais via une bijection de numérotation, cela revient donc à choisir une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Or par hypothèse de récurrence, il y a $n!$ telle bijections possible. Avec les $n + 1$ choix pour l'image de 1, on a donc en tout $(n + 1) \times n!$ bijections possibles. Ce qui prouve l'énoncé. \square

On en déduit en particulier que si E et F ont le même cardinal n , le nombre de bijection de E dans F est $n!$.

Définition 2.2 (\mathfrak{S}_n) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit \mathfrak{S}_n comme étant l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, i.e. c'est l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui même.

On a donc prouvé que $\text{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!$.

Le but du chapitre suivant est l'étude plus poussée de \mathfrak{S}_n .

2.3 Combinaisons, Arrangements, p -listes

Définition 2.3 (Combinaison, Arrangement, p -liste) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

- On appelle *combinaison de p éléments de E* pour $0 \leq p \leq n$, toute partie à p éléments de E . C'est donc une "sélection" de p éléments de E sans prendre attention à l'ordre dans lequel on choisit les éléments. C'est un tirage sans remise et sans tenir compte de l'ordre.
- On appelle *p -liste de E* tout p -uplet de E^p . Une p -liste est donc une "sélection" de p élément de E mais pour lesquels l'ordre de sélection à une importance. C'est un tirage avec remise en tenant compte de l'ordre.
- On appelle *arrangement de p éléments de E* avec $0 \leq p \leq n$, tout p -uplet de E^p n'ayant que des éléments distincts 2 à 2. En d'autres termes, un arrangement est une "sélection" de p éléments de E sans remise et en tenant compte de l'ordre.

Dans le cas d'une combinaison, le tirage se fait sans remise puisque le résultat est l'ensemble de ce qui a été tiré. Or on ne note pas 2 fois un même éléments dans un ensemble. Ce qui compte, c'est d'avoir p éléments globalement, regardé en tant qu'ensemble de solution.

Exemple 2.4 :

On considère E un ensemble à 5 éléments e_1, \dots, e_5 .

- Une combinaison de 3 éléments de E est $\{1, 2, 3\}$ ou $\{1, 4, 5\}$.
- Une 3-liste de E est par exemple $(1, 1, 2)$ ou $(1, 5, 2)$ ou $(1, 2, 1)$. Toutes ces 3-listes sont différentes.

- Un arrangement à 3 éléments de E est par exemple : $(1, 2, 3)$ ou $(1, 5, 2)$. Il ne faut pas de répétition.

Proposition 2.7 (Nombre de combinaison, arrangement, p -liste) :

Soit E un ensemble de cardinal n .

1. $\forall p \in \mathbb{N}$, le nombre de p -listes de E est n^p .
2. $\forall p \in \{0, \dots, n\}$, le nombre d'arrangements à p éléments de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$ noté A_n^p .
3. $\forall p \in \{0, \dots, n\}$, le nombre de combinaison de p éléments de E est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$, noté $\binom{n}{p}$.
Ce sont les coefficients binomiaux.

Démonstration :

1. Une p -liste de E est donc un p -uplet avec des éléments de E . Il y a donc p place avec à chaque place n possibilité (les éléments de E). On a donc en tout $\underbrace{n \times \dots \times n}_p$ possibilités et donc n^p .
2. Pour un arrangement à p éléments de E , on a le choix entre n élément pour la première place, puis $n-1$ pour la seconde etc. On a donc $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n \times \dots \times (n-p+1) \times (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$.
3. Une combinaison de p élément est un arrangement de p élément sans prendre l'ordre en compte, donc il faut regarder les arrangements à permutations des éléments près. Or pour un arrangement à p éléments, il y a $p!$ façons de placer les éléments dans le p -uplet. Donc le nombre de combinaison de p éléments est $\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \binom{n}{p}$.

□

Exemple 2.5 :

Combien de mots de p lettres peut-on former avec un alphabet de n lettres ?

Exemple 2.6 :

On considère une compétition athlétique avec n participants. Combien de podiums différents peut-on obtenir ?

Exemple 2.7 :

Les Shadoks n'ont que 4 syllabes : GA, BU, ZO, MEU et tous leurs mots ne sont formés que de juxtaposition de ces syllabes. Par exemple GA veut dire "moi" ; GAGA veut dire "toi" ; GAGAGA veut dire "espèce d'imbécile" ; BU veut dire "petite pompe hélicoïdale avec des roulettes" ; BUBU veut dire oui etc.

Combien de syllabes maximum faut-il pour former un mot pour dépasser le nombre de mots de la langue française ? (on considérera qu'il y a 200 000 mots en français).

Proposition 2.8 (Cas des combinaisons) :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Soit $p \in \{0, \dots, n\}$. Le nombre de sous-ensemble de E de cardinal p est $\binom{n}{p}$.

Autrement dit,

$$\text{Card}\{X \subset E, |X| = p\} = \binom{n}{p}.$$

Démonstration :

Pour faire un sous-ensemble de cardinal p de E , on doit choisir p éléments distincts parmi les n dont on dispose sans tenir compte de l'ordre. \square

Remarque :

On récapitule :

	Avec répétitions	Sans répétitions
Avec ordre	p -listes (p -uplets)	p -arrangements (p -listes sans répétition)
Sans ordre	HP	p -combinaisons (parties à p éléments)

Exemple 2.8 :

On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages comportant deux paires ?
3. Combien y a-t-il de tirages comportant au moins un carreau ?

Proposition 2.9 (Nombre d'injections [✓]) :

Soit E et F deux ensembles finis avec $\text{Card}(E) = p$ et $\text{Card}(F) = n$. Alors :

- (i) Si $p > n$, il n'y a pas d'injections de $E \rightarrow F$.
- (ii) Si $p \leq n$, il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ injections $E \rightarrow F$.

Démonstration :

Le premier point a déjà été vu. Pour le second, fabriquer une injection consiste simplement à sélectionner un sous-ensemble p éléments distincts de F qui servira d'image pour l'injection. En effet, il faut décider de l'image d'un élément de E . On a n choix pour cette image.

Une fois ce choix fait, il reste à établir l'image d'un second élément. Comme on veut que l'application soit injective, il ne faut pas choisir l'image déjà choisi pour le premier élément considéré. Il faut changer. On a donc $n - 1$ choix possible.

Un troisième élément de E doit être envoyé sur un élément qui n'a pas encore été choisi afin de conserver l'injectivité. On a donc $n - 2$ choix possible. Et en itérant le processus, pour un k -ème élément de E considéré, on aura donc $n - k$ choix possible pour son image afin qu'elle soit distinctes des $k - 1$ images déjà sélectionnés. Ce sont des tirages sans remise.

Finalement, pour faire une injection, on aura donc $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times (n - p + 1)$ choix possible, c'est à dire $\frac{n!}{(n-p)!}$. \square

Remarque :

Calculer le nombre de surjections est un exercice beaucoup plus difficile qui peut faire l'objet d'une partie complète de concours.

2.4 Rappels sur les coefficients binomiaux

Nous allons redémontrer plusieurs propriétés sur les coefficients binomiaux en utilisant des raisonnements combinatoires.

Proposition 2.10 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall p \in \{0, \dots, n\}, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration :

L'application de passage au complémentaire $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto \overline{A}$ est une bijection. Comme (A, \overline{A}) forme une partition de E , fabriquer une partie A de E à p éléments revient à fabriquer son

complémentaire \bar{A} de E qui aura $n - p$ éléments. Autrement dit, par passage au complémentaire

$$\begin{array}{ccc} \{A \subset E, |A| = p\} & \rightarrow & \{B \subset E, |B| = n - p\} \\ X & \mapsto & \bar{X} \end{array}$$

est une bijection. □

Proposition 2.11 (Formule de Pascal) :

Soit $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n - 1$.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Démonstration :

Le but est compter le nombre de façon qu'il y a de construire un sous-ensemble à $p + 1$ éléments d'un ensemble à $n + 1$ éléments. Soit donc E un ensemble de cardinal $n + 1$. On note $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}(E)$ l'ensemble de toutes les sous-parties de E de cardinale $p + 1$, i.e. $\mathcal{E} = \{A \subset E, |A| = p + 1\}$. Tout élément de \mathcal{E} peut donc, soit contenir x , soit ne pas contenir x . On note alors $\mathcal{X} = \{A \in \mathcal{E}, x \in A\} = \{A \subset E, |A| = p + 1 \text{ et } x \in A\} \subset \mathcal{E}$ et on note $\mathcal{Y} = \{A \in \mathcal{E}, x \notin A\} \subset \mathcal{E}$. On a donc $\mathcal{E} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ et \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont disjoints.

On sait, par définition que $|\mathcal{E}| = \binom{n+1}{p+1}$. Mais on a aussi $|\mathcal{E}| = |\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}|$.

Or, pour faire un élément de \mathcal{X} , il faut prendre un sous-ensemble de $E \setminus \{x\}$ et lui rajouter x , donc il y a autant d'ensemble dans \mathcal{X} que de façons de faire un sous-ensemble à p éléments d'un ensemble à n élément, cad qu'il y a donc $\binom{n}{p}$ ensemble dans \mathcal{X} . Donc $|\mathcal{X}| = \binom{n}{p}$.

Maintenant, pour faire un ensemble de \mathcal{Y} , il faut un ensemble à $p + 1$ éléments de $E \setminus \{x\}$. Il y a donc $\binom{n}{p+1}$ façons de faire un tel ensemble. Donc $|\mathcal{Y}| = \binom{n}{p+1}$.

Mais comme \mathcal{E} est la réunion disjointe de ces deux ensemble, on a bien $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$. □

Proposition 2.12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, \dots, n\}$.

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration :

Soit E de cardinal n . On va compter le nombre de couple (x, A) avec $x \in A \subset E$ et $\text{Card}(A) = p$.

Si on commence par choisir A , on a $\binom{n}{p}$ choix de partie A de cardinal p . Puis, pour chacun des choix de A , on a p choix d'un élément de A . Donc $p\binom{n}{p}$ choix en tout.

Si on commence par choisir x , on a n choix pour l'élément x . Puis, pour chacun de ces choix, il faut fabriquer un sous-ensemble à p éléments "autour", ce qui revient à choisir $p-1$ autres éléments dans les $n-1$ qui restent (en enlevant x déjà choisi). On a donc $\binom{n-1}{p-1}$ choix d'un sous-ensemble à p éléments qui contient un $x \in E$ fixé.

Donc

$$p\binom{n}{p} = \text{Card}(\{(x, A), x \in A \subset E, |A| = p\}) = n\binom{n-1}{p-1}.$$

□

Exemple 2.9 :

Montrer que si $n, p, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq p \leq n$,

$$\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

Proposition 2.13 (Binôme de Newton) :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration :

On a $(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times \cdots \times (a+b)}_n$. Le développement de ce produit est donc une somme de

termes de la forme $a^k b^{n-k}$. Pour chaque terme de la somme, il faut déterminer à chaque fois si c'est le "a" ou le "b" de chaque parenthèse qui va contribuer pour calculer le terme de la somme qu'on regarde. Autrement dit, pour chaque terme de la somme du développement, il faut sélectionner les parenthèses dont ce sera le "a" qui sera conservé dans la production du terme de la somme qui nous intéresse. Les autres parenthèses "donneront" leurs "b". Donc pour chaque terme de la forme $a^k b^{n-k}$, il faut choisir k parenthèses parmi les n en présence, sans tenir compte de l'ordre dans lequel on choisit ces parenthèses. Il y a donc $\binom{n}{k}$ façon de choisir les parenthèses qui contribueront à la puissance de a dans le terme $a^k b^{n-k}$, les autres feront la puissance de b . □

Exemple 2.10 :

Soit E un ensemble à n éléments. Calculer la somme des cardinaux des sous-ensembles de E .