Chapitre 28 - TD
Dénombrement

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

25 mars 2025

1 Ensembles Finis

Exercice 1 :
Soit E, F et G des ensembles finis. Calculer $\mathrm{Card}(E \cup F \cup G)$ en fonction de $\mathrm{Card}(E)$, $\mathrm{Card}(F)$, $\mathrm{Card}(G)$ et du cardinal de leurs intersections.

Exercice 2 :
Soient A, B deux parties d'un ensemble E fini. Calculer $\mathrm{Card}(A \Delta B)$ en fonction de $\mathrm{Card}(A)$, $\mathrm{Card}(B)$ et $\mathrm{Card}(A \cap B)$.

Exercice 3 (Lemme des bergers) :
Soient E et F deux ensembles finis non vides et p un entier ≥ 1. Soit $f : E \to F$ telle que $\forall y \in F$, $\mathrm{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right) = p$. Montrer alors que $|E| = p|F|$.
Remarque :
Un berger qui connaît le nombre de pattes de sont troupeau, connaît le nombre de têtes

Exercice 4 :
Soit E un ensemble fini et $n = \mathrm{Card}\, E$.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & \overline{X} \end{array}$ est une bijection.
2. En déduire la somme des cardinaux de tous les sous-ensembles de E (donc par une autre méthode que celle vu dans le cours).
3. Calculer les sommes :
   (a)
   $$\sum_{X,Y \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X \cap Y)$$
   (b)
   $$\sum_{X,Y \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X \cup Y)$$

Exercice 5 (Cardinal de $\mathcal{P}(E)$) :
Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $p \in \{0, \ldots, n\}$. Déterminer le nombre de sous-ensemble de E de cardinal p.
2. En déduire $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 6 :
Soit E un ensemble et $a \in E$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection.
2. On suppose E de cardinal fini et on pose $n = \mathrm{Card}(E)$. On pose $\mathcal{P}_0(E)$ l'ensembles des sous-parties de E de cardinal paire et $\mathcal{P}_1(E)$ l'ensemble des sous-parties de E de cardinal impair. Montrer que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_0(E)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_1(E))$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

2 Dénombrement

Exercice 7 :
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$ et en déduire $\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X)$.
2. Calculer $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}\binom{n}{p}$ et en déduire $\sum_{X \subset E} \frac{1}{1+|X|}$.

Exercice 8 (Formule de Chu-Vandermonde) :
Soit A et B deux ensembles à a et b éléments respectivement, avec $A \cap B = \emptyset$. En considérant les parties à $n \leq \min(a, b)$ éléments de $A \cup B$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 9 (Anagrammes) :
Déterminer le nombre d'anagramme du mot MATHEMATIQUE. Et du mot ANAGRAMME. Et de PARALLELEPIPEDE.

Exercice 10 :
Soit E un ensemble à $n \geq 1$ éléments.

1. Soit $X \subset E$ une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties $Y \subset E$ de E disjointes de X ?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E disjointes ?
3. Si A est une partie à p éléments de E, combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?
4. Si A est une partie à p éléments de E, combien y a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A, pour $p \leq m \leq n$?
5. Combien y a-t-il de parties X et Y telles que $X \subset Y$?
6. Soit A une partie de E à p éléments. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tel que $X \cap Y = A$?

Exercice 11 (Rubik's Cube) :
Vous connaissez tous le Rubik's cube. On va déterminer le nombre de façons de placer les faces de couleurs (donc les cubes qui composent le Rubik's cube).

1. En ne considérant que les cubes-sommets, déterminer le nombres de façons de les positionner, sans plus de précautions.
2. En prenant en compte l'orientation de ces cubes-sommets, quelle conséquence sur le résultat de la question précédente ?
3. En considère maintenant seulement les cubes arêtes. Combien y a-t-il de façon naïve de positionner les cubes arrêtes ?
4. Modifier cette valeur en prenant en compte un argument d'orientation.
5. Supposons que l'on a réussi a bien placé tous les cubes sauf 2. Que peut-on dire sur la position de ces deux cubes ?
6. Que peut-on dire de l'influence des cubes centraux ?
7. En déduire que le nombre de combinaisons possibles du Rubik's Cube est

$$43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000$$

Exercice 12 :
Combien y a-t-il de bijections de $\{1, \dots, 12\}$ dans lui même vérifiant :

1. si $k \equiv 0[2]$, alors $f(k) \equiv 0[2]$?
2. si $3|k$ alors $3|f(k)$?
3. Les deux propriétés précédentes en même temps ?
4. Et si on remplace "bijections" par seulement "applications" ?

Exercice 13 (Nombre de surjections) :
Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, on définit $S(n, p)$ comme le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

1. Supposons $0 < n < p$. Calculer $S(n, p)$.
2. Calculer $S(n, n)$, $S(n, 1)$ et $S(n, 2)$, pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $S(p+1, p) = \frac{p(p+1)!}{2}$ en étudiant l'élément de $[\![1, p]\!]$ ayant 2 antécédents, après avoir justifier de son existence.
4. Montrer que pour tout $p \geq 1$ et tout $r \in [\![1, p]\!]$, le nombre d'applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ ayant un ensemble image à r éléments est égale à $\binom{p}{r} S(n, r)$.
5. En déduire $\forall n, k \geq 1$, $k^n = \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} S(n, r)$.
6. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq r \leq p$, on a
$$\sum_{k=r}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{r} = (-1)^p \delta_{r,p}$$
7. En déduire que $\forall n, p \geq 1$,
$$S(n, p) = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$$

Exercice 14 :
Un étudiant possède 14 livres de quatre matières différentes : 4 livres de mathématiques, 5 de physique, 3 de philosophie et 2 d'anglais. Il veut ranger ces livres sur une étagère.

1. De combien de façon peut-il le faire s'il ne tient pas compte des matières ?
2. De combien de façon peut-il le faire s'il range d'abord les livres d'anglais, puis ceux de physique, puis ceux de maths, puis ceux de philo ?
3. De combien de façons peut-il le faire s'il range les livres par matières ?

Exercice 15 :
On considère un jeu de cartes de 32 cartes. On appelle main, toute combinaison de 5 cartes (pour jouer au poker, par exemple).

1. Combien de mains contiennent 3 rois exactement ?
2. Combien de mains contiennent 3 piques exactement ?
3. Combien de mains contiennent 3 cartes de même hauteur exactement ?
4. Combien de mains contiennent 3 cartes de la même couleur exactement ?
5. Combien de mains contiennent exactement 2 valets ?
6. Combien de mains contiennent exactement une paire ?
7. Combien de mains contiennent 2 paires différentes ?
8. Combien de mains contiennent un brelan de rois (trois cartes de même hauteur et deux autres cartes ne formant pas une paire) ?
9. Combien de mains contiennent un brelan ?
10. Combien de mains contiennent un full (un brelan et une paire) ?

Exercice 16 :
Une chaîne de télévision privée décide d'opter pour un système de "programme à péage" en utilisant des décodeurs commandés par des codes à 8 chiffres.

1. Donner le nombre d'abonnés potentiels, puis le nombre d'abonnés avec des codes de 8 chiffres différents.
2. Calculer le nombre de codes à 2 chiffres différents, l'un étant utilisé une fois et l'autre 7 fois.
3. Même question avec 3 chiffres différents, dont 2 sont utilisés une fois et le troisième 6 fois.

Exercice 17 :
Neuf personnes se présentent dans un cabinet médical avec deux médecins. Le premier verra 5 personnes, le second que quatre.

1. De combien de façons différentes les deux personnes peuvent-elles être réparties entre chaque médecin ?
2. Il y a 4 personnes portant des lunettes. De combien de façons peut-on répartir les patients de façons à ce que chaque médecin verra 2 personnes à lunettes ?
3. De plus, on veut que M.Dupont qui porte des lunettes et M.Dupond qui n'en porte pas, soient examinés par le même médecin. Combien de répartition possible ?

Exercice 18 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal $n+3$ et F un ensemble de cardinal n.

1. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E sur F telles que l'un des éléments de F ait 4 antécédents ?

2. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E sur F telles que l'un des éléments de F ait 3 antécédents et un autre de 2 ?
3. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E sur F ?

Exercice 19 :

On trace n droites en positions génériques (deux d'entres-elles non parallèles, trois d'entres-elles non concourantes).

Combien peut-on former de triangles ?

Exercice 20 (Nombre de partitions d'un entier) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de partitions de $\{1, \ldots, n\}$ en p parties de deux façons différentes.

1. Première méthode : par bijections.
   (a) Combien existe-t-il de suites strictement croissantes de p entiers choisis dans $\{0, \ldots, n\}$? (avec $p \leq n$)
   (b) Combien existe-t-il de suite $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ avec $x_1 + \cdots + x_p \leq n$
   (c) Même question avec $x_1 + \cdots + x_p = n$?
2. Deuxième méthode : par récurrence.
   (a) On pose Γ_n^p le nombre de p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \cdots + x_p = n$.
   Déterminer Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2 et Γ_2^p.
   (b) Montrer que $\Gamma_{n+1}^{p+1} = \Gamma_{n+1}^p + \Gamma_n^{p+1}$ (on classera les $p+1$-upelts selon que $x_1 = 0$ ou non).
   (c) En déduire que $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{n}$.