DM 7

Polynôme et Algèbre Linéaire sont dans un bateau

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 25 Mars 2025

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique que $\mathbb{R}_2[X]$. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right) + P\left(\frac{X}{2}\right)\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \widetilde{P}(1) \end{array}$$

Partie I : Étude générale

1. On sait que la composition est linéaire bilinéaire, donc $P \mapsto P\left(\frac{X+1}{2}\right)$ est linéaire. De même $P \mapsto P(X/2)$ est linéaire (par linéarité à gauche de $(P, Q) \mapsto P \circ Q$). Donc f est une combinaison linéaire d'applications linéaires, donc f est linéaire.

   De plus, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors, par degré d'une composée de polynôme,
   $$\deg(P(\frac{X+1}{2})) = \deg(P)\det(\frac{X+1}{2}) = \deg(P) \leq 2$$
   et
   $$\deg(P(X/2)) = \deg(P)\deg(X/2) = \deg(P) \leq 2.$$
   Finalement,
   $$\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P(\frac{X+1}{2})), \deg(P(X/2))) \leq 2.$$
   Donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

   D'où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$, *i.e.* f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. L'application évaluation est linéaire, donc φ est linéaire. Montrons le. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \widetilde{P + \mu Q}(1) = \lambda\widetilde{P}(1) + \mu\widetilde{Q}(1) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$. Donc φ est une forme linéaire.

3. On a $f(1)(X) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$. Et
   $$f(X)(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{X+1}{2} + \frac{X}{2}\right) = \frac{X}{2} + \frac{1}{4} \qquad f(X^2)(X) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{X+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X}{2}\right)^2\right) = \frac{X^2+X}{4} + \frac{1}{8}.$$

4. D'après les calculs de la question précédente, $(f(1), f(X), f(X^2))$ est une famille de polynômes échelonnés en degré ne contenant pas le polynôme nul. Donc c'est une famille libre. Elle contient 3 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$. Donc, par caractérisation des bases en dimension finies, $f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   f envoie donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ sur une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc, par théorème d'isomorphisme, f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (*i.e.* $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])$).

   Par conséquent, f est à la fois injective et surjective (car bijective).

5. Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0 && \text{def } \ker(\varphi) \\ &\iff \widetilde{P}(1) = 0 && \text{def } \varphi \\ &\iff a + b + c = 0. \end{aligned}$$

Donc $\ker(\varphi) = \{a+bX+cX^2,\ a,b,c \in \mathbb{R} | a+b+c = 0\} = \{a+bX-(a+b)X^2,\ a,b \in \mathbb{R}\} = \{(X-1)(-a(X+1)-bX),\ a,b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^2-1, X-1)$. Donc $(X-1, X^2-1)$ est une famille génératrice de $\ker(\varphi)$.

De plus, elle est échelonnée en degré, donc c'est une famille libre. Donc c'est une base de $\ker(\varphi)$. Donc $\dim(\ker(\varphi)) = 2$.

6. Par théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker(\varphi)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. Donc, par caractérisation de la surjectivité par le rang, φ est surjective.

En revanche, comme $\dim(\ker(\varphi)) = 2 > 0$, on a $\ker(\varphi) \neq \{0\}$ et donc φ non injective par caractérisation de l'injectivité par le rang.

Partie II : Calcul des puissances d'un endomorphisme

7. On pose

$$P_0(X) = 1, \qquad P_1(X) = 1 - 2X, \qquad P_2(X) = 6X^2 - 6X + 1.$$

On pose aussi $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$. Alors $\mathcal{B}'$ est une famille de polynômes échelonnés en degrés ne contenant pas le polynôme nul, donc $\mathcal{B}'$ est une famille libre. Cette famille contient 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ avec $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. On calcule :

$$\begin{aligned} f(P_0) &= 1 && \text{cf 1} \\ &= P_0(X) \\ f(P_1) &= \frac{1}{2}\left(P_1\left(\frac{X+1}{2}\right) + P_1\left(\frac{X}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{X+1}{2} + 1 - 2\frac{X}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - X \\ &= \frac{1}{2}P_1(X) \\ f(P_2) &= \frac{1}{2}\left(P_2\left(\frac{X+1}{2}\right) + P_2\left(\frac{X}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - 6\frac{X+1}{2} + 6\frac{(X+1)^2}{4} + 1 - 6\frac{X}{2} + 6\frac{X^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 3X + 3X^2\right) \\ &= \frac{1}{4}(1 - 6X + 6X^2) \\ &= \frac{1}{4}P_2(X). \end{aligned}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.
   (a) On a

$$\begin{aligned} P_2(X) &= \frac{c}{6}(6X^2 - 6X + 1) + (b+c)X + (a - c/6) \\ &= \frac{c}{6}P_2(X) - \frac{b+c}{2}(-2X+1) + \left(a - c/6 + \frac{b+c}{2}\right) \\ &= \frac{c}{6}P_2(X) - \frac{b+c}{2}P_1(X) + \frac{6a+3b+2c}{6}P_0(X). \end{aligned}$$

(b) D'après la question 8, on a $f(P_0) = 1$, $f(P_1) = P_1/2$ et $f(P_2) = P_2/4$. Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(P_0) = P_0$, $f^n(P_1) = \frac{1}{2^n} P_1$ et $f^n(P_2) = \frac{1}{4^n} P_2$ (ce qui est vrai pour $n = 1$ et $n = 0$ puisque $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$).

Alors

$$\begin{aligned}
f^{n+1}(P_0) &= f(f^n(P_0)) \\
&= f(P_0) && \text{HR} \\
&= P_0 \\
f^{n+1}(P_1) &= f(f^n(P_1)) \\
&= f(\frac{1}{2^n} P_1) && \text{HR} \\
&= \frac{1}{2^n} f(P_1) && \text{linéarité de } f \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} P_1 \\
f^{n+1}(P_2) &= f(f^n(P_2)) \\
&= f(\frac{1}{4^n} P_2) && \text{HR} \\
&= \frac{1}{4^n} f(P_2) && \text{linéarité de } f \\
&= \frac{1}{4^{n+1}} P_2
\end{aligned}$$

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(P_0) = P_0$, $f^n(P_1) = \frac{1}{2^n} P_1$ et $f^n(P_2) = \frac{1}{4^n} P_2$.

Alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(P) &= f^n\left(\frac{c}{6} P_2 - \frac{b+c}{2} P_1 + \frac{6a+3b+2c}{6} P_0\right) && \text{cf 9a} \\
&= \frac{c}{6} f^n(P_2) - \frac{b+c}{2} f^n(P_1) + \frac{6a+3b+2c}{6} f^n(P_0) && \text{linéarité de } f^n \\
&= \frac{c}{6}\frac{P_2}{4^n} - \frac{b+c}{2}\frac{P_1}{2^n} + \frac{6a+3b+2c}{6} P_0 && \text{cf rec précédente}
\end{aligned}$$

(c) D'après les expressions de P_0, P_1 et P_2 dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, on a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(P) &= \frac{c}{6}\frac{P_2}{4^n} - \frac{b+c}{2}\frac{P_1}{2^n} + \frac{6a+3b+2c}{6} P_0 && \text{cf 9b} \\
&= \frac{c}{6}\frac{6X^2-6X+1}{4^n} - \frac{b+c}{2}\frac{1-2X}{2^n} + \frac{6a+3b+2c}{6} \\
&= \frac{c}{4^n} X^2 + \left(-\frac{c}{4^n} + \frac{b+c}{2^n}\right) X + \frac{6a+3b+2c+c/4^n-3b/2^n-3c/2^n}{6} \\
&= \frac{c}{4^n} X^2 + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right) X + a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}}\right) c.
\end{aligned}$$

(d) Par linéarité de φ, on en déduit

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(f^n(P)) &= a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}}\right) c + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right) + \frac{c}{4^n} \\
&= a + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}}\right) c.
\end{aligned}$$

10. On note d'abord que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2-1} P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(P(X/2) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

$$= f(P)(X)$$

et aussi

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \sum_{k=0}^{0} P(X+k) = P(X) = f^0(P).$$

Supposons maintenant qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f^{n+1}(P) &= f^n(f(P)) \\
&= f^n\left(\frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right) + P\left(\frac{X}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f^n\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) + f^n\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right)\right) && \text{linéarité } f^n \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{\frac{X+k}{2^n}+1}{2}\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{\frac{X+k}{2^n}}{2}\right)\right) && \text{Hyp Rec} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right)\right) && \text{chgt indice } j = k+2^n \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) && \text{regroupement par paquet}
\end{aligned}$$

Donc, par principe de récurrence, on vient de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

11. En utilisant la question précédente, et par linéarité de φ, on a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(f^n(P)) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \widetilde{P}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} \widetilde{P}\left(\frac{k}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

Si $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(f^n(P)) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\left(a + b\frac{k}{2^n} + c\frac{k^2}{4^n}\right) \\
&= a + \frac{b}{4^n}\sum_{k=1}^{2^n} k + \frac{c}{2^{3n}}\sum_{k=1}^{2^n} k^2 \\
&= a + \frac{b}{4^n}\frac{2^n(2^n+1)}{2} + \frac{c}{2^{3n}}\frac{2^n(2^n+1)(2^{n+1}+1)}{6} \\
&= a + \frac{2^n+1}{2^{n+1}}b + \frac{2^{2n+1}+3\cdot 2^n+1}{3\cdot 2^{2n+1}}c \\
&= a + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}\right)c.
\end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression vu à la question 9d.