NOM :
Prénom :

Mardi 25 Mars 2025

Interrogation 21

Représentation Matricielle

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Caractérisation du rang d'une matrice par les matrices extraites.

Le rang d'une matrice est la taille de la plus grande sous-matrice extraite inversible.

2. Formule de changement de bases pour une application linéaire (générale).

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ la matrice de passage de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f)$ les matrices de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ respectivement. Alors

$$A = QA'P^{-1}.$$

3. Définition du rang d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de A, correspondant à la dimension de l'ev engendré par les colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. *i.e.* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Vect}(C_1(A), \ldots, C_p(A)) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

4. Matrice d'un isomorphisme.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $\dim(E) = \dim(F) = n$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $f \in \mathrm{GL}(E,F) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Et dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

5. Définition de la trace d'un endomorphisme.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit la trace de f, noté $\mathrm{tr}(f)$, comme la trace de la matrice représentation de f dans n'importe quelle base de E. *i.e.* $\forall \mathcal{B} \subset E$ base de E, $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

6. Équivalence à une matrice par blocs avec le rang.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} Q.$$

7. Définition de matrices semblables.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ON dit que A et B sont semblables si $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

8. Définition de la matrice représentative d'un vecteur.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $x \in E$. Alors $\exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. On appelle matrice représentative de x dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, la matrice colonne

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Exercice 2 :
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x + 3y - z, x - y + 2z)$. On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et une base de $\ker(f)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)) && \text{iso repr mat} \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} && \text{élimination dans un Vect} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Donc, par théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 3 - 2 = 1$.

Or, d'après le calcul du rang précédent, $C_1 - C_2 - C_3 = 0$. Donc, par isomorphisme de représentation matricielle et par linéarité, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1) - f(e_2) - f(e_3)) = 0$. Donc, par isomorphisme de représentation matricielle, $f(e_1 - e_2 - e_3) = 0$. Et donc $e_1 - e_2 - e_3 \in \ker(f)$. Or $\dim(\ker(f)) = 1$ et $e_1 - e_2 - e_3 = (1, -1, -1) \neq 0$. Donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $(1, -1, -1)$ est une base de $\ker(f)$.