NOM :
Prénom :

Mardi 01 Avril 2025

Interrogation 22

Systèmes Linéaires

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'un système de Cramer.

Un système de Cramer est un système carré définit par une matrice inversible. Autrement dit, un système est dit de Cramer s'il s'écrit matriciellement $AX = B$ avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. Caractérisation des systèmes compatibles.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et le système $AX = B$. Alors $AX = B$ est compatible ssi $b \in \mathrm{Im}(A)$ où $b \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur canoniquement associé à B ssi $\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}(A)$.

3. Effet des matrices d'opérations élémentaires (matrice d'opérations élémentaires et l'opération correspondante).

Soit $A \in \mathcal{M}_n n, p(\mathbb{K})$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$, $A(I_p + \lambda E_{i,j})$ correspond à l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $A(I_p + (\lambda - 1)E_{i,i})$ correspond à l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$. Et $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$, $A\mathcal{E}_{i,j}$ correspond à $C_i \leftrightarrow C_j$, où $\vee_{i,j} = I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

4. La multiplication à gauche agit sur les lignes.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Alors $E_{i,j}A$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ remplie de 0 et donc la i-ème ligne correspond à la j-ème ligne de A.

5. Caractérisation des matrices inversibles par les systèmes.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ a une solution $\iff \forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ a une unique solution $\iff AX = 0$ a une unique solution.

6. Structure de l'ensemble des solutions.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $x_0 \in \mathbb{K}^p$ une solution du système $AX = B$. Alors l'ensemble des solutions de $AX = B$ est $x_0 + \ker(A)$.

7. Nombres de solutions d'un système.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $r = \mathrm{rg}(A)$. Si $\mathrm{rg}(A) = p$, alors le système a aucune solution s'il est incompatible, ou une unique solution. Si $r < p$, alors le système a aucune solution s'il est incompatible, ou une infinité de solutions paramétrées par $p - r$ paramètres.

Exercice 2 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Discuter le nombre de solutions du système $\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ ax + y + z = a \\ x + y + z = a - 1 \end{cases}$ en fonction du paramètre a.

On résout classiquement :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ ax + y + z = a \\ x + y + z = a - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1-2a & 1-a^2 \\ 0 & -1 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 1-a \\ 0 & 1-2a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 1-a \\ 0 & 0 & (1-a)(2-a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \\ (a-2)(1-2a) \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + (1-2a)L_2$$

Si $a \notin \{1, 2\}$, alors $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer et donc a une unique solution. Si $a = 1$, alors le système est incompatible et n'a donc pas de solutions. Si $a = 2$, alors le système est de rang 2 et compatible et a donc une infinité de solutions paramétrés par un paramètre.