DS 9
Algèbre Linéaire - Matrices
Matrices stochastiques

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 02 Avril 2025

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Ce problème comporte trois parties. Les partie A et B peuvent se traiter de façon indépendante. On peut utiliser certains résultats de la partie B pour traiter la partie C.

Notations

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n colonnes et à coefficients réels. On note ${}^tM$ la transposée de la matrice M.

On appellera vecteur colonne toute matrice à n lignes et 1 colonne à coefficients réels.

Définitions

On dit qu'un vecteur colonne est *stochastique* lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ces coefficients vaut 1. Par exemple, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ est stochastique car $0.3 \geq 0$ et $0.6 \geq 0$ et $0.1 \geq 0$ et $0.3 + 0.6 + 0.1 = 1$.

On dit qu'une matrice carré est stochastique lorsque chacune de ses colonnes l'est.

Partie A : Un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on étudie les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) à valeurs réelles définies par

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2};\ z_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}\ :$$

$$(R_n)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & \frac{7}{10}x_n & + & \frac{2}{5}y_n & + & \frac{1}{2}z_n \\ y_{n+1} & = & \frac{3}{10}x_n & & & + & \frac{1}{10}z_n \\ z_{n+1} & = & & & \frac{3}{5}y_n & + & \frac{2}{5}z_n \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. On considère l'ensemble E des vecteurs stochastiques de $\mathbb{R}^3$. E est-il est un espace vectoriel ? Et qu'en est-il de $F = \{(x, y, z), \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système (R_n) s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$ avec A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.
3. Justifier que la matrice A est stochastique.
4. Calculer la trace de A. La matrice A est-elle inversible ?
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathrm{rg}(\lambda I_3 - A)$ en fonction de λ.
   On pose $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{10}$.
6. Pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, déterminer une base de l'espace vectoriel $\ker(A - \lambda_i I_3)$. On notera ε_i chacun des vecteurs trouvés.
7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
   (a) Justifier que la famille $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice D de f dans cette base.
   (b) Justifier qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Calculer P^{-1}.
8. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
9. (a) Exprimer X_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que le vecteur colonne X_n est stochastique.
10. Prouver que la suite (x_n) (respectivement (y_n), (z_n)) est convergente vers une limite ℓ_x (respectivement ℓ_y, ℓ_z).
11. Prouver que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix}$ est stochastique. Calculer le produit matriciel de A par ce vecteur colonne.

Partie B : Cas de la dimension 2

Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère la suite (X_n) de vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^2$ telle que X_0 est stochastique et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

12. Montrer qu'il existe deux réels a et b de $[0, 1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.
   On définit deux suites réelles (x_n) et (y_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
13. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne X_n est stochastique.
14. Montrer que $0 \leq \mathrm{tr}(A) \leq 2$.
15. (a) On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$. Montrer alors que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. Que se passe-t-il pour la suite (X_n) ?
   (b) On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 2$. Que vaut A ? Que se passe-t-il pour la suite (X_n) ?
   On suppose désormais que $0 < \mathrm{tr}(A) < 2$.

16. Montrer que $-1 < a - b < 1$.

    Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$.

17. (a) Montrer que $AV = qV$ où l'on exprimera q en fonction de a et b.
    (b) Prouver que $|q| < 1$.
18. Déterminer un vecteur colonne U non nul vérifiant $AU = U$.
19. En déduire qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible tel que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale.
20. En déduire qu'il existe un vecteur colonne $L = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ et un réel λ vérifiant

$$AL = L \quad \text{et} \quad X_0 = L + \lambda V$$

    On ne cherchera pas à calculer ℓ_x, ℓ_y et λ.

21. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = L + q^n \lambda V$.
22. Prouver alors que la suite (x_n) (respectivement (y_n)) est convergente vers ℓ_x (respectivement ℓ_y).
23. En déduire que le vecteur colonne L est stochastique.
24. Soit T un vecteur colonne stochastique de $\mathbb{R}^2$ tel que $AT = T$. Montrer que $T = L$.

Partie C : Un cas particulier

On reprend les notations de la partie B. Dans cette partie, on suppose de plus que la matrice A n'est pas inversible.

25. Montrer que la matrice A est de rang 1.
26. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$.
27. Établir alors que $A^2 = A$.
28. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = AX_0$.

Partie D : Propriétés générales

29. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont stochastiques, alors AB est encore stochastiques.
30. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique est-il un espace vectoriel ?
31. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors $0 \leq \mathrm{tr}(A) \leq n$. Donner un exemple de deux matrices stochastiques $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\mathrm{tr}(B) = n$.
32. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \ker({}^tA - I_n)$. La réciproque est-elle vraie ?
33. Monter que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.