DS 9
Algèbre Linéaire
Matrices stochastiques
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 02 Avril 2025

Partie A : Un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on étudie les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) à valeurs réelles définies par

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2};\ z_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}\ :$$

$$(R_n) \begin{cases} x_{n+1} &= \frac{7}{10}x_n &+ \frac{2}{5}y_n &+ \frac{1}{2}z_n \\ y_{n+1} &= \frac{3}{10}x_n & &+ \frac{1}{10}z_n \\ z_{n+1} &= & \frac{3}{5}y_n &+ \frac{2}{5}z_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. E n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^3$ puisque le vecteur nul n'est pas dedans. Mais F en est un. En effet, le vecteur nul est dedans (facile à vérifier). Et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z), (a, b, c) \in F$, alors $\lambda(x, y, z)+\mu(a, b, c) = (\lambda x+\mu a, \lambda y+\mu b, \lambda z+\mu c)$ et $(\lambda x + \mu a) + (\lambda y + \mu b) + (\lambda z + \mu c) = \lambda(x + y + z) + \mu(a + b + c) = 0$ donc F est stable par combinaisons linéaires et donc F est un sev de $\mathbb{R}^3$ par caractérisation des sev.

   Ou bien : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 0\} = \{(x, y, -x-y),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$. Et donc F est un ev.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} (R_n) &\iff \begin{cases} x_{n+1} &= \frac{7}{10}x_n &+ \frac{2}{5}y_n &+ \frac{1}{2}z_n \\ y_{n+1} &= \frac{3}{10}x_n & &+ \frac{1}{10}z_n \\ z_{n+1} &= & \frac{3}{5}y_n &+ \frac{2}{5}z_n \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\ &\iff X_{n+1} = AX_n \end{aligned}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

3. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$. Tous les coefficients de A sont positifs et la somme des éléments de la première colonne est

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i,1} = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} + 0 = 1$$

et donc la première colonne est stochastique.

La somme des éléments de la seconde colonne est

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i,2} = \frac{2}{5} + 0 + \frac{3}{5} = 1$$

et donc la seconde colonne de A est stochastique.

La somme des éléments de la troisième colonne est

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i,3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = 1$$

et donc la troisième colonne est stochastique.

Donc les trois colonnes de A sont stochastiques et donc la matrice A est stochastique, par définition d'une matrice stochastique.

4. On a $\operatorname{tr}(A) = \frac{7}{10} + 0 + \frac{2}{5} = \frac{11}{10}$ et

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{10}L_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{rg}(A) < 3$ et donc A n'est pas inversible par caractérisation des matrices inversibles par le rang.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\lambda I_3 - A) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda - \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} & \lambda & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \lambda - \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ -\frac{3}{10} & \lambda & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \lambda - \frac{2}{5} \end{pmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \lambda + \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \lambda - \frac{2}{5} \end{pmatrix} && \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \lambda & \lambda \\ 0 & -\frac{3}{5} & \lambda - \frac{2}{5} \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \lambda-\frac{1}{10} \end{pmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{2}C_2 \\
&= \begin{cases} 3 & \lambda \notin \{0,1,1/10\} \\ 2 & \lambda \in \{0,1,1/10\} \end{cases}
\end{aligned}$$

On pose $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{10}$.

6. Au regard des colonnes de la matrice A, on voit assez vite que $C_1 + 2C_2 - 3C_3 = 0$. Mais faisons comme si on n'avait pas vu ça et retrouvons ce vecteur par le calcul. On cherche donc un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $f(x, y, z) = 0$. On résout donc

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(A) &\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{cases} \frac{7}{10}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}z = 0 \\ \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 7x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} && \begin{matrix} L_1 \leftarrow 10L_1 \\ L_2 \leftarrow 10L_2 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 \end{matrix} \\
&\iff \begin{cases} -8x + 4y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ -6x + 3y = 0 \end{cases} && \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}. && L_1 \leftarrow -\tfrac{1}{4}L_1 = -\tfrac{1}{3}L_3
\end{aligned}$$

On trouve donc $\ker(f) = \{(x, 2x, -3x), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1, 2, -3)$. On pose $\varepsilon_1 = (1, 2, -3)$.

De même, on résout

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(A - I_3) &\iff \begin{cases} -\frac{3}{10}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{3}{10}x - y + \frac{1}{10}z = 0 \\ \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x + 4y + 5z = 0 \\ 3x - 10y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} && \begin{matrix} L_1 \leftarrow 10L_1 \\ L_2 \leftarrow 10L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{5}{3}L_3 \end{matrix} \\
&\iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ 3x - 10y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} && L_1 \leftarrow \tfrac{1}{6}(L_1 + L_2) \\
&\iff \begin{cases} 3x - 10y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x - 9z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} && L_1 \leftarrow L_1 + 10L_2 \\
&\iff \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc $\ker(A - I_3) = \{(3z, z, z), z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(3, 1, 1)$. On pose alors $\varepsilon_2 = (3, 1, 1)$.

Et enfin

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\ker(A-\frac{1}{10}I_3) &\iff \begin{cases}\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y+\frac{1}{2}z=0\\ \frac{3}{10}x-\frac{1}{10}y+\frac{1}{10}z=0\\ \frac{3}{5}y+\frac{3}{10}z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}6x+4y+5z=0\\ 3x-y+z=0\\ 6y+3z=0\end{cases} && \begin{array}{r}L_1\leftarrow 10L_1\\ L_2\leftarrow 10L_2\\ L_3\leftarrow 10L_3\end{array}\\
&\iff \begin{cases}6y+3z=0\\ 3x-y+z=0\\ 6y+3z=0\end{cases} && L_1\leftarrow L_1-2L_2\\
&\iff \begin{cases}2y+z=0\\ 3x-y+z=0\end{cases} && L_1\leftarrow \tfrac{1}{3}L_1\\
&\iff \begin{cases}2y+z=0\\ x-y=0\end{cases}. && L_2\leftarrow \tfrac{1}{3}(L_2-L_1)
\end{aligned}$$

donc $\ker(A-\frac{1}{10}I_3)=\{(y,y,-2y),y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(1,1,-2)$. On pose donc $\varepsilon_3=(1,1,-2)$.

7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

(a) On pose $\mathcal{C}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)&=\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3))\\
&=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&1\\-3&1&-2\end{pmatrix}\\
&=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-5&-1\\0&5&0\end{pmatrix} && \begin{array}{r}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1-L_2\end{array}\\
&=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-5&-1\\0&0&-1\end{pmatrix} && L_3\leftarrow L_3+L_2\\
&=3
\end{aligned}$$

Donc la matrice dans la base canonique de la famille $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est inversible, donc ses colonnes sont linéairement indépendantes, donc $\mathcal{B}$ est une famille libre et elle est de cardinal 3 en dimension 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ par caractérisation des bases en dimension finie.

On a alors

$$D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}f(\varepsilon_1)&f(\varepsilon_2)&f(\varepsilon_3)\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{array}$$

(b) Si on pose alors $P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, alors P est inversible puisque c'est la matrice d'un automorphisme (c'est une matrice de changement de base) et on a $P^{-1}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

La formule de changement de base, nous donne alors

$$A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=PDP^{-1}$$

et par définition,

$$P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&1\\-3&1&-2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ e_1\\ e_2\\ e_3\end{array}$$

(c) On a $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Il faut donc exprimer les vecteurs e_1, e_2 et e_3 en fonction de ε_1, ε_2 et ε_3.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 - 3e_3 \\ \varepsilon_2 = 3e_1 + e_2 + e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 + e_2 - 2e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 - 3e_3 \\ \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 = -5e_2 + 10e_3 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = -e_2 + e_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 - 3e_3 \\ \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 = -5e_2 + 10e_3 \\ 5\varepsilon_3 - \varepsilon_2 - 2\varepsilon_1 = -5e_3 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow 5L_3 - L_2$$

$$\iff \begin{cases} -15\varepsilon_3 + 3\varepsilon_2 + 11\varepsilon_1 = 5e_1 + 10e_2 \\ 10\varepsilon_3 - \varepsilon_2 - 7\varepsilon_1 = -5e_2 \\ -5\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 = 5e_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 5L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} 5\varepsilon_3 + \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 = 5e_1 \\ -10\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + 7\varepsilon_1 = 5e_2 \\ -5\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 = 5e_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}$$

On en déduit donc

$$P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3/5 & 7/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array}$$

8. Tout d'abord, on a $X_0 = I_3 X_0 = PD^0P^{-1}X_0$.
Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = PD^nP^{-1}X_0$. Alors dans ce cas,

$$X_{n+1} = AX_n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PDD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0.$$

On vient donc de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

9. (a) Comme D est une matrice diagonale, par une récurrence facile, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-n} \end{pmatrix}.$$

Et dans ce cas, on calcul, avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} X_n &= PD^nP^{-1}X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 & 7/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10^{-n} \\ 0 & 1 & 10^{-n} \\ 0 & 1 & -2 \times 10^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 & 7/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10^{-n} + 3/5 & -2 \times 10^{-n} + 3/5 & -10^{-n} + 3/5 \\ 10^{-n} + 1/5 & -2 \times 10^{-n} + 1/5 & -10^{-n} + 1/5 \\ -2 \times 10^{-n} + 1/5 & 4 \times 10^{-n} + 1/5 & 2 \times 10^{-n} + 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}10^{-n} + \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{2}10^{-n} + \frac{1}{5} \\ 10^{-n} + \frac{1}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) On sait que X_0 est stochastique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme des éléments de X_n donne :

$$-\frac{1}{2}10^{-n} + \frac{3}{5} - \frac{1}{2}10^{-n} + \frac{1}{5} + 10^{-n} + \frac{1}{5} = 1.$$

Donc le vecteur colonne X_n est stochastique.

10. Le calcul de la question 7a, montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} x_n &= -\frac{1}{2}10^{-n} + \frac{3}{5} \\ y_n &= -\frac{1}{2}10^{-n} + \frac{1}{5} \\ z_n &= 10^{-n} + \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Ces trois suites sont donc des combinaisons linéaire de la suite (10^{-n}), qui est convergente vers 0, et de la suite constante égale à 1, qui est également convergente. Comme l'espace des suites convergente est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on en déduit que les suites (x_n), (y_n) et (z_n) sont des suites convergentes et la linéarité de la limite nous donne

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{5}, \qquad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{5}, \qquad z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{5}.$$

On a donc $\ell_x = 3/5$ et $\ell_y = \ell_z = 1/5$.

11. On a

$$\ell_x + \ell_y + \ell_z = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1,$$

donc le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ est stochastique. Et enfin :

$$A \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

(On dira l'année prochaine que ce vecteur est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1).

Partie 2 : Cas de la dimension 2

12. On a désormais $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stochastique. Donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A étant stochastique, on doit avoir les relations $a + c = 1$ et $b + d = 1$. Autrement dit, $c = a - 1$ et $d = b - 1$. Et donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$. Par ailleurs, A étant toujours stochastique, les coefficients doivent être positifs. On doit donc avoir $a \geq 0$ et $1 - a \geq 0$, ce qui mène à $a \leq 1$. Ainsi, $0 \leq a \leq 1$ et donc $a \in [0, 1]$. Le même raisonnement sur b qui joue le même rôle que a nous donne $b \in [0, 1]$.

13. On sait que X_0 est stochastique par hypothèse. Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que X_n soit stochastique, c'est à dire tel que $x_n + y_n = 1$ avec $x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$. Alors on a

$$X_{n+1} = AX_n = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_n + by_n \\ (1-a)x_n + (1-b)y_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit d'abord que $x_{n+1} = ax_n + by_n$ et $y_{n+1} = (1-a)x_n + (1-b)y_n$. Mais comme $a, 1-a, b, 1-b, x_n, y_n \geq 0$, on en déduit que x_{n+1} et $y_{n+1} \geq 0$.

Puis

$$x_{n+1} + y_{n+1} = ax_n + by_n + (1-a)x_n + (1-b)y_n = x_n + y_n = 1.$$

Donc X_{n+1} est stochastique.

Finalement, on vient de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n est stochastique.

14. On a $\mathrm{tr}(A) = a + 1 - b$. Alors $\mathrm{tr}(A) \geq a \geq 0$ car $1 - b \geq 0$ et $\mathrm{tr}(A) = a + 1 - b \leq 1 + 1 - 0 = 2$ car $a \leq 1$ et $-b \leq 0$. Donc $\mathrm{tr}(A) \in [0, 2]$.

15. (a) On suppose $\mathrm{tr}(A) = 0$. Or $\mathrm{tr}(A)$ est la somme de deux nombres positifs a et $1 - b$. Donc les deux sont nuls, *i.e.* $a = 0$ et $1 - b = 0$, ce qui mène directement à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le calcul nous fournit $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{2n} = A^{2n}X_0 = I_2^n X_0 = X_0 \quad \text{et} \quad X_{2n+1} = A^{2n+1}X_0 = AA^{2n}X_0 = AX_0 = X_1.$$

Donc la suite (X_n) oscille entre deux vecteurs.

(b) On suppose $\mathrm{tr}(A) = 2$. Dans ce cas, on doit avoir $a = 1$ et $1 - b = 1$ puisque $a, 1 - b \in [0, 1]$, c'est à dire $a = 1$ et $b = 0$. Alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Et par conséquent, la suite (X_n) est la suite constante égale à X_0.

On suppose désormais $0 < \mathrm{tr}(A) < 2$.

16. Donc $0 < a + 1 - b < 2$ et donc $-1 < a - b < 1$.

17. (a) On a

$$AV = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)V = qV$$

avec $q = a - b$.

(b) On sait depuis la question 16 que $-1 < a - b < 1$. Autrement dit, $|a - b| < 1$ et donc $|q| < 1$.

18. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $AU = U$.

$$\begin{aligned} AU = U &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} (a-1)x + by = 0 \\ (1-a)x - by = 0 \end{cases} \\ &\iff (a-1)x + by = 0 \end{aligned}$$

On peut alors considérons le vecteur $U = \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$. Ce vecteur est non nul. En effet, s'il était nul, on aurait $|q| = |a - b| = |1 - 0| = 1 < 1$ ce qui est absurde. Donc $U \neq 0$.

19. Considérons la matrice Q dont les colonnes sont les vecteurs U et V respectivement, *i.e.* considérons la matrice $Q = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1-a & -1 \end{pmatrix}$. Alors $\det(Q) = -b - 1 + a = a - b - 1 \neq 0$ d'après la question 16. Donc Q est inversible. On peut alors la voir comme une matrice de changement de base pour l'endomorphisme canoniquement associé à A. Et donc $Q^{-1}AQ$ correspond à la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base (u, v). On obtient alors $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ d'après la définition de U et le calcul fait à la question 17a.

20. Les vecteurs U et V forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Donc $\exists \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X_0 = \mu U + \lambda V$. On pose $L = \mu U$. Alors $AL = \mu AU = \mu U = L$. Donc $X_0 = L + \lambda V$ avec $AL = L$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

21. On a $X_0 = L + \lambda V = L + q^0 \lambda V$.

Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = L + q^n \lambda V$. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = AL + q^n \lambda AV = L + q^n \lambda q V = L + q^{n+1} \lambda V$$

d'après le calcul fait à la question 17a.

On vient donc de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = L + q^n \lambda V$.

22. On sait depuis la question 17a que $|q| < 1$. Donc $q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. On en déduit donc $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$ et donc les deux suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. On notera ℓ_x et ℓ_y leur limite respective et $L = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \end{pmatrix}$.

23. On a montré à la question 13 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est stochastique. Autrement dit, on a la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n + y_n = 1$. Mais les deux suites étant convergentes, par passage à la limite, on obtient $\ell_x + \ell_y = 1$. Et donc le vecteur L est stochastique.

24. Soit $T \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ stochastique tel que $AT = T$.

D'après ce qui a été fait à la question 18, on sait que l'ensemble des vecteur invariant par A (donc vérifiant $AX = X$) est une droite vectorielle. Donc les deux vecteurs T et L sont proportionnels. Par ailleurs, les deux vecteurs sont non nuls puisqu'ils sont stochastiques (l'un au moins de leurs coefficients est non nuls pour que les sommes des coefficients fassent 1). Donc il existe un réel α tel que $T = \alpha L$. Tous les coefficients en présence doivent être positifs, donc $\alpha \geq 0$.

T étant stochastique, on doit donc avoir $1 = \alpha \ell_x + \alpha \ell_y = \alpha$ car L est stochastique. Et donc $T = L$.

Partie C : Un cas particulier

25. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ n'est pas inversible par hypothèse. Donc $\operatorname{rg}(A) \in \{0,1\}$ par caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par son rang. Mais $\operatorname{rg} A = 0 \iff A = 0$. Or la matrice étant stochastique, elle ne peut être nulle (si $a = 0$, alors $1 - a \neq 0$ et inversement. Donc au moins un des coefficients par colonne est non nul). Donc $\operatorname{rg} A \neq 0$ et donc $\operatorname{rg} A = 1$.

26. La matrice étant de rang 1 et n'ayant que 2 colonne, les deux colonnes sont donc colinéaires. Elles sont donc proportionnelles. Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $b = \alpha a$ et $1 - b = \alpha(1-a)$. On en déduit donc $\alpha - \alpha a = 1 - b = 1 - \alpha a$ et donc $\alpha = 1$. Donc $b = a$. D'où $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$ avec $a \in [0,1]$.

27. On en déduit

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + a(1-a) & a^2 + a(1-a) \\ a(1-a) + (1-a)^2 & a(1-a) + (1-a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$$

28. Une récurrence facile. On a $X_1 = AX_0$.

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $X_n = AX_0$. Alors $X_{n+1} = AX_n = A^2X_0 = AX_0$.

Donc la suite (X_n) est stationnaire en AX_0 à partir de $n = 1$.

Partie D : Propriétés générales

29. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A et B stochastique. Alors $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par définition du produit matriciel,

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Alors $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $c_{i,j} \geq 0$ car $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j}, b_{i,j} \geq 0$. Et

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(b_{k,j} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} && \text{car } A \text{ stochastique} \\ &= 1 && \text{car } B \text{ stochastique} \end{aligned}$$

Donc par définition, C est stochastique.

30. Les matrices stochastiques doivent avoir leur coefficients positifs, par définition. Donc si A est stochastiques, alors $-A$ ne l'est pas. Et donc l'ensemble des matrices carrées stochastiques n'est pas stable par inverse pour l'addition (ou par produit par -1). Donc l'ensemble des matrices stochastiques n'est pas un espace vectoriel.

31. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Or $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$. Donc $\operatorname{tr}(A) \geq 0$. Et la somme des coefficients des éléments d'une colonne de A vaut 1. Donc $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j} \leq n$.

En effet, si $\exists i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j} > 1$, alors $1 = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \geq a_{i,j} > 1$. ☠.

Et donc $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

On pose $B = I_n$. Alors B est évidemment stochastique et $\operatorname{tr}(B) = n$. Et on pose

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + E_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\operatorname{tr}(A) = 0$ et A est stochastique (chaque colonne n'est composée que de 0 et un seul 1, donc les coefficients sont positifs et la somme fait 1).

32. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique. Donc, par définition, pour chaque colonne, la somme des éléments vaut 1. Autrement dit, la somme des lignes vaut $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit $\sum_{i=1}^n L_i(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Par linéarité de la transposition, on a donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n {}^tL_j(A) = \sum_{j=1}^n C_j({}^tA) = {}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et donc $e \in \ker({}^tA)$.

La réciproque est évidemment fausse. Il suffit de se mettre en dimension 2. Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, A n'est pas stochastique (tous les coefficients ne sont pas positifs). De plus, A est symétrique. Donc

$${}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $(1, 1) \in \ker({}^tA - I_2)$.

33. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On pose $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $BA = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Par produit matriciel,

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

et

$$\forall i, j \in \{1, \dots, p\},\ d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n c_{i,i} && \text{def trace} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,i} \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j} && \text{commutativité dans } \mathbb{R} \\
&= \sum_{j=1}^p d_{j,j} \\
&= \operatorname{tr}(BA) && \text{def trace}
\end{aligned}$$