Chapitre 23 - TD
Groupe symétrique

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

1er avril 2025

Exercice 1 :
Soit $n \geq 4$.

1. Soit $a, b, c, d \in \{1, \dots, n\}$ deux à deux distincts. Que vaut $(a\ b) \circ (c\ d) \circ (d\ a)$?
2. Que dire d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ possédant $n-1$ points fixes ?
3. Une permutation $s \in \mathfrak{S}_n$ telle que $s \neq \mathrm{Id}_n$ et $s^2 = \mathrm{Id}_n$ est-elle nécessairement une transposition ?
4. Énumérer tous les éléments de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 2 :
Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints et déterminer la signature des permutations

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :
Déterminer les signatures des permutations suivantes :

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$
4. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma(k) = n + 1 - k$.

Exercice 4 :
soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposition σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{2025}.

Exercice 5 :
Soit $n \geq 5$.
Montrer que si $(a\ b\ c)$ et $(x\ y\ z)$ sont deux 3-cycles de $\mathfrak{S}_n$, alors il existe une permutation σ paire telle que

$$\sigma \circ (a\ b\ c) \circ \sigma^{-1} = (x\ y\ z)$$

Exercice 6 :
Soit $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$.
Combien $\mathfrak{S}_n$ possède de k-cycles ?

Exercice 7 :
Soit $n \geq 2$ et $c = (1\ 2\ \ldots\ n-1\ n)$ une permutation circulaire. Déterminer toutes les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui commutent avec c.

Exercice 8 :
Soit $n \geq 3$.

1. Soit $a \neq b \in \{1, \ldots, n\}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Décrire la permutation $\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1}$.
2. Le centre de $\mathfrak{S}_n$, noté $Z(\mathfrak{S}_n)$ est l'ensemble des permutations qui commutent avec toutes les autres permutations. Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 9 :
Soit $n \geq 3$ impair et $s \in \mathfrak{S}_n$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}$.
Montrer que s possède au moins un point fixe.

Exercice 10 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer le nombre de partie $A \subset [\![1, n]\!]$ telle que *i.e.* $\sigma(A) = A$.
2. Soit $A \subset [\![1, n]\!]$ et $p = \mathrm{Card}(A)$. Déterminer le nombre de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(A) = A$.

Exercice 11 (Théorème de Cayley) :
Soit G un groupe de cardinal n.
Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 12 :
Soit $n \geq 2$ et H l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}\ \sigma(k) + \sigma(n+1-k) = n+1$.
Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.

Exercice 13 :
Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que les transpositions $(1\ k)$ pour $k \in \{2, \dots, n\}$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(k\ k+1)$, $1 \leq k \leq n-1$.
3. (a) On pose $t = (1\ 2)$ et $c = (1\ 2\ 3\ \dots\ n)$. Calculer $c^k \circ t \circ c^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par t et c.

Exercice 14 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles.

Exercice 15 (Inégalités de réarrangement (***)) :
Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels avec $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$. Le but de l'exercice est de détermine :

$$\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)} \qquad \text{et} \qquad \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)}$$

1. On commence par le maximum.
   (a) On note $T(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)}$. Montrer que T admet un maximum.
   (b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que le maximum est atteint en l'identité.
   (c) En déduire la valeur du maximum.
2. Pour le minimum, en considérant la permutation de comptage à l'envers, déduire de ce qui précède que le minimum est atteint pour cette permutation.

Exercice 16 (Nombre moyen de pts fixes (Mines MP) (**)) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer le nombre moyen de points fixes des permutations de $\mathfrak{S}_n$.
Indic : *Considérer, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les permutations fixant i.*'

Exercice 17 (Nombre de dérangements) :
Un dérangement est une permutation sans aucun point fixe. On note D_n le nombre de dérangements à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer D_1.
2. Déterminer D_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant une permutation de $\mathfrak{S}_n$ laissant invariant k éléments, montrer que
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k.$$
4. En vous inspirant d'un exercice de dénombrement, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 18 :
Soit φ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ transformant une transposition en une transposition. Autrement dit, $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ bijective, $\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, $\varphi(\sigma \circ \tau) = \varphi(\sigma) \circ \varphi(\tau)$.
On pose, $\forall k \in \{2, \dots, n\}$, $t_k = (1\ k)$.

1. Justifier que $\varphi(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.
2. Montrer qu'il existe $a_1, a_2, a_3 \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\varphi(t_2) = (a_1\ a_2)$ et $\varphi(t_3) = (a_1\ a_3)$.
3. Montrer que $\forall i \in \{4, \dots, n\}$, $\exists a_i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\varphi(t_i) = (a_1\ a_i)$.
4. Montrer que $s : i \mapsto a_i$ est bijective.
5. Montrer que φ est l'automorphisme intérieur associée à s, *i.e.* $\varphi(\sigma) = s \circ \sigma \circ s^{-1}$.

Exercice 19 (Matrices de permutations) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle matrice de la permutation σ la matrice $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Montrer que $\forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $P_{\sigma \circ \sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$
2. Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et déterminer son inverse
3. Montrer que $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(\sigma) = P_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif.
4. Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 0 sauf un seul 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne, alors $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $P = P_\sigma$.
5. Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma^{-1} = {}^tP_\sigma$.
6. Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{tr}(P_\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ.