



Chapitre 9

Calcul d'intégrales - Approximation de solutions d'équations différentielles par la méthode d'Euler

Exercices

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

27 mars 2025

1 Intégration

Exercice 1 (Méthode de Simpson) :

La méthode de Simpson est basée sur l'interpolation par des polynômes de degré 2 sur chacun des intervalles de la subdivision. On choisit d'interpoler f par ses valeurs en a_k , a_{k+1} et $m_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ le milieu de l'intervalle.

On cherche donc un polynôme $P_k(X) = \alpha_k X^2 + \beta_k X + \gamma_k$ sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Les polynômes de Lagrange nous donnent donc :

$$P_k(X) = f(a_k) \frac{(X - a_{k+1})(X - m_k)}{(a_k - a_{k+1})(a_k - m_k)} + f(m_k) \frac{(X - a_k)(X - a_{k+1})}{(m_k - a_k)(m_k - a_{k+1})} + f(a_{k+1}) \frac{(X - a_k)(X - m_k)}{(a_{k+1} - m_k)(a_{k+1} - a_k)}.$$

En développant, on obtient donc

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \begin{cases} \alpha_k = \frac{1}{(a_{k+1} - a_k)^2} (2f(a_{k+1}) + 2f(a_k) - 4f(m_k)) \\ \beta_k = \frac{1}{(a_{k+1} - a_k)^2} (8m_k f(m_k) - 2(m_k + a_k)f(a_{k+1}) - 2(m_k + a_{k+1})f(a_k)) \\ \gamma_k = \frac{1}{(a_{k+1} - a_k)^2} (2m_k a_k f(a_{k+1}) + 2m_k a_{k+1} f(a_k) - 4a_k a_{k+1} f(m_k)) \end{cases}$$

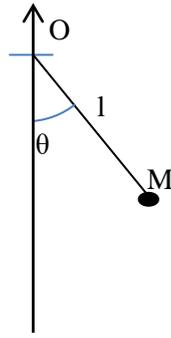
La valeur approchée de l'intégrale par la méthode de Simpson est alors

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \tilde{P}_k(t) dt$$

1. Déterminer l'expression de $\int_{a_k}^{a_{k+1}} \tilde{P}_k(t) dt$ en ne faisant apparaître que les coefficients α_k , β_k , γ_k .
2. Coder la fonction `Simpson(f:"function", a:float, b:float, n:int) -> float`.

Exercice 2 (Pendule simple) :

Le système étudié consiste en un point matériel M de masse m relié par une barre rigide de masse nulle et de longueur ℓ à un point fixe O . Le système est soumis à la pesanteur et la position du point matériel M est repérée par l'angle θ entre la verticale et la droite (OM) . Le vecteur d'accélération de pesanteur est noté \vec{g} .



Le pendule est lâché avec une vitesse initiale nulle et avec un angle initial θ_0 . La période du mouvement de M est donnée par la formule

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

on prendre $\ell = 1\text{m}$ et $g = 9.81\text{ms}^{-2}$.

1. Écrire une fonction `periodRect(theta0:float, n:int) -> float` qui prend comme argument la condition initiale θ_0 , et un entier n et qui calcule la valeur approchée de la période du mouvement en utilisant la méthode d'intégration des rectangles en utilisant n rectangles. Tester la fonction avec $\theta_0 = \pi/6$ avec $n = 1000$.
2. Comparer avec la valeur obtenue avec une méthode pré-implémenté dans python (on utilisera la fonction `quad` du cours).
3. Tracer, sur un même graphe, $T(\theta_0)$ pour $\theta_0 \in]0, \pi[$ obtenue par les deux méthodes précédentes (la méthode "théorique" et la méthode approchée). Commenter.
4. En utilisant une méthode dichotomique, trouver la première valeur de θ_0 pour laquelle la période diffère de plus de 1% de la valeur $2\pi\sqrt{\ell/g}$. On utilisera la fonction `quad` pour évaluer T avec θ_0 en degré.

Exercice 3 (Accéléromètre) :

Un capteur accélérométrique permet de mesurer une accélération. Il est généralement constituée d'une masselotte fixée au boîtier de la pièce en mouvement par un ressort. L'élongation du ressort permet de déterminer l'accélération du boîtier par rapport un référentiel galiléen. Ces composants ont été largement miniaturisés durant les 10 dernières années pour s'intégrer aux téléphones portables, tablettes, manettes de jeux et autres objets électroniques ayant besoin de mesurer un mouvement.

Ce problème vise à tester les possibilités de mesures de ces composants : peut-on, à partir de la mesure de l'accélération, remonter facilement à la vitesse, voire à la trajectoire du boîtier dans lequel est monté le capteur ?

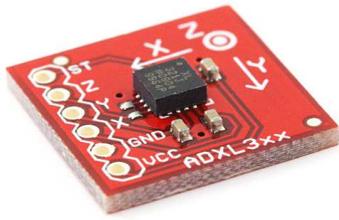


FIGURE 2 – Accéléromètre miniature

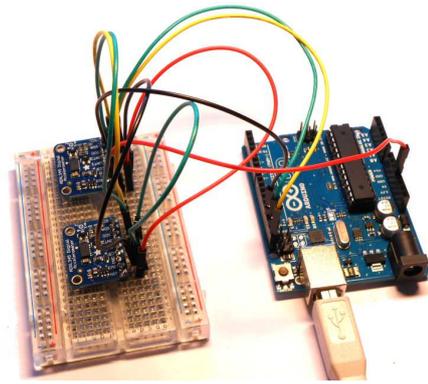


FIGURE 3 – Montage de l'accéléromètre sur l'arduino pour la mesure

On donne des fichiers de points pour 3 fréquences d'échantillonnage : `Acceleration-mesures-2.5Hz.csv`, `Acceleration-mesures-10.0Hz.csv` et `Acceleration-mesures-25.0Hz.csv`. La colonne de gauche correspond au temps; la colonne de droite à l'accélération en fonction du temps. La séparation des deux colonnes se fait par un point-virgule.

```
1 0.0;10.0\n
2 0.408163265306;7.7564523987542815\n
3 0.816326530612;4.675081195013929\n
4 1.22448979592;1.349187561794656\n
```

Cette fois, la courbe à intégrer n'a pas d'expression connue (pour rendre l'exercice plus intéressant). On ne peut utiliser que le fichier de points. De plus, on ne cherche plus l'aire sous la courbe, mais l'évolution de l'aire sous la courbe en fonction de l'abscisse. Il ne s'agit plus de renvoyer la valeur de l'intégrale sous la courbe, mais une liste de valeurs F_i telles que $F_i - F_0 = \int_0^{t_i} f(t)dt$.

Les fonction permettant l'intégration numérique devront avoir toute en argument (`t:list`, `f:list`, `f0:float`) où `t` est la valeur en abscisse; `f` les valeurs en ordonnées; et `f0` la condition initiale.

1. Faire un script permettant de récupérer les données des 3 fichiers dans des listes que l'on réutilisera tout au long de l'exercice. On aura donc trois paires de variables globales (`t25,Acc25`), (`t100,Acc100`) et (`t250,Acc250`).
2. Faire une fonction `evol()` qui trace l'évolution de l'accélération en fonction du temps pour les trois fichiers sur un même graphique.
3. Adapter la méthode des trapèzes pour créer une fonction `primitive(x:list, y:list, F0:float) -> list` qui prend en argument la liste des abscisses `x` et la liste des ordonnées `y` ainsi qu'une valeur initiale `F0` et qui renvoie la primitive $F(x_i) = F_0 + \int_0^{x_i} f(t)dt$ (voir le cours de maths et le théorème fondamental de l'intégration).
4. Appliquer la fonction `primitive` aux données pour obtenir la liste des vitesses `V` et des positions `X` au cours du temps. On prendra $V_0 = 0$ et $X_0 = 0$.
5. Comparer pour les trois fichiers les courbes obtenues avec accélération, vitesse et position en fonction du temps. Commenter l'influence de la période d'échantillonnage.
6. [BONUS] Reprendre l'exercice avec la méthode des rectangles au lieu de la méthode des trapèzes. Commenter.

2 Équations différentielles - Méthode d'Euler

Exercice 4 :

En 1798, Thomas Malthus a proposé un modèle d'évolution de population dont le problème de Cauchy est

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt}(t) = rP(t) \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$$

où r est le taux d'accroissement de la population.

On suppose que la population est initialement de 50 personnes et le taux d'accroissement est de 1,2 par unité de temps.

1. Montrer que le schéma numérique est $\forall i \in \llbracket 0, n \llbracket, P[i+1] = P[i](1+r\Delta t)$
2. Proposer un fonction `Malthus(dt:float) -> None` qui résolve numériquement ce problème de Cauchy sur un intervalle d'un siècle avec un intervalle de `dt` entre les mesures. On affichera un graphe avec la solution théorique et la solution calculée numériquement.
3. Critiquer les résultats obtenus.

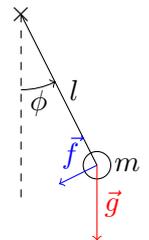
Exercice 5 (Exemple de résolution approchée d'une équation différentielle du 2ème ordre (Pendule simple amorti)) :

On considère un pendule amorti lâché à vitesse nulle à un angle de $\frac{\pi}{4}$, de masse m , de longueur l avec un frottement visqueux opposé à la vitesse et de norme $f = k \frac{d\phi}{dt}$.

Valeurs numériques : $g = 9,81 [m.s^{-2}]$, $l = 1 [m]$, $m = 1 [kg]$, $k = 0,05 [kg.m^{-1}s^{-1}]$.

Une étude physique donne l'équation du mouvement suivante :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\phi) - \frac{k}{m\ell^2} \frac{d\phi}{dt} \quad (E)$$



Ainsi en posant $\alpha = \frac{g}{l}$ et $\beta = \frac{k}{m\ell^2}$, on considère pour $I = [0, 5]$ le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \phi'' = -\alpha \sin(\phi) - \beta \phi' \\ \phi(t_0) = \phi_0 = \frac{\pi}{4} \\ \phi'(t_0) = \phi'_0 = 0 \end{cases}$$

On propose un maillage régulier avec $n \in \mathbb{N}^*$ discrétisations sur l'intervalle $I = [0, 5]$, i.e. $h = \frac{5}{n}$.

Partie A : expression directe avec Taylor-Young

- A.1. À l'aide de développements limités d'ordre 2, donner une approximation de $\phi''(t)$ en fonction de $\phi(t+h)$ et $\phi(t-h)$ quand $h \rightarrow 0$.
- A.2. En déduire un schéma numérique de la résolution de l'équation différentielle (E).

Partie B : vue comme une équation différentielle d'ordre 1

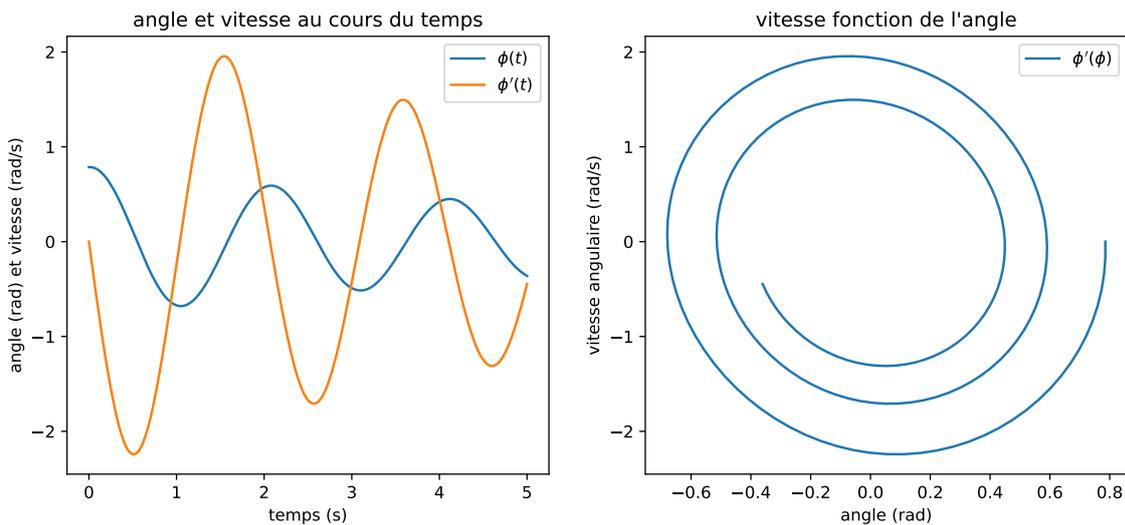
- B.1. Montrer que l'équation différentielle (E) peut se voir comme une équation différentielle d'ordre 1 en posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix}.$$

- B.2. Cas où les oscillations restent petites ($\sin \phi \approx \phi$) :
 - (a) Montrer que l'équation différentielle (E) devient alors une équation linéaire en X .
 - (b) Déterminer le nouveau schéma numérique.
- B.3. Cas général :
 - (a) Préciser ce que devient le schéma numérique de résolution dans ce cas.

- (b) Proposer une fonction `penduleAmorti(phi0:tuple, I:tuple, n:int) -> tuple` qui renvoie trois listes correspondant aux temps, positions angulaires, et vitesses angulaires (i.e. une liste `T` des temps, une liste `Phi` des positions angulaires et une liste `dPhi` des vitesses angulaires).
- (c) Proposer ensuite un script permettant de tracer l'angle en fonction du temps et la vitesse en fonction du temps, puis le portrait de phase (la vitesse en fonction de l'angle).

Remarque : avec le schéma numérique explicite directement issu de l'expression de $\phi''(t)$ en fonction de $\phi(t+h)$, $\phi(t)$ et $\phi(t-h)$, on obtient pour $n = 200$ les courbes suivantes (résultat plus précis puisque le schéma est en $O(h^2)$ courbes similaires à celles du schéma d'ordre 1 avec $n = 2000$) :



Exercice 6 (Centrale 2015 partie II) :

Soit y une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} et t_{min} et t_{max} deux réels tels que $t_{min} < t_{max}$. On note I l'intervalle $[t_{min}; t_{max}]$. On s'intéresse à une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$(E_1) \quad \forall t \in I, \quad y''(t) = f(y(t))$$

où f est une fonction donnée, continue sur \mathbb{R} . De nombreux systèmes physiques peuvent être décrits par une équation de ce type.

On suppose connues les valeurs $y_0 = y(t_{min})$ et $z_0 = y'(t_{min})$. On suppose également que le système étudié est conservatif. Ce qui entraîne l'existence d'une quantité indépendante du temps (énergie, quantité de mouvement, ...) notée E , qui vérifie l'équation suivante, où $g' = -f$.

$$(E_2) \quad \forall t \in I, \quad \frac{1}{2}y'(t)^2 + g(y(t)) = E$$

Partie A : Mise en forme du problème

Pour résoudre numériquement l'équation différentielle (E_1) , on introduit le fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in I, z(t) = y'(t)$.

A-1. Montrer que l'équation (E_1) peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre en $z(t)$ et $y(t)$, noté (S) .

A-2. Soit n un entier strictement supérieur en 1 et $J_n = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On pose $h = \frac{t_{max} - t_{min}}{n-1}$ et $\forall i \in J_n, t_i = t_{min} + ih$. Montrer que pour tout entier $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$,

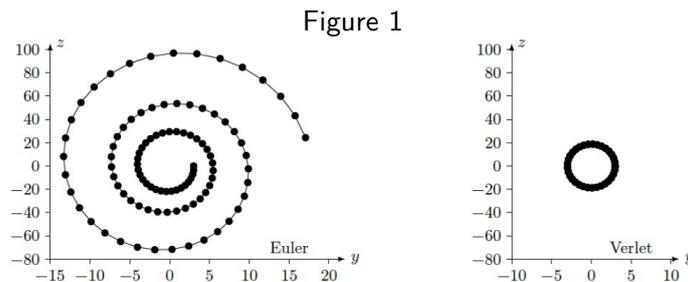
$$(E_3) \quad y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t)dt \quad \text{et} \quad (E_4) \quad z(t_{i+1}) = z(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t))dt$$

La suite du problème exploite les notations introduites dans cette partie et présente deux méthodes numériques dans lesquelles les intégrales précédentes sont remplacées par une valeur approchée.

Partie B : Schéma d'Euler explicite

Dans le schéma d'Euler explicite, chaque terme sous le signe intégrale est remplacé par sa valeur prise en la borne inférieure.

- B-1. Dans ce schéma, montrer que les équations (E_3) et (E_4) permettent de définir deux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$ où y_i et z_i sont des valeurs approchées de $y(t_i)$ et $z(t_i)$. Donner les relations de récurrence permettant de déterminer les valeurs de y_i et z_i connaissant y_0 et z_0 .
- B-2. Écrire une fonction `euler` qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$.
- B-3. Pour illustrer cette méthode, on considère l'équation différentielle $\forall t \in I, y''(t) = -\omega^2 y(t)$ dans laquelle ω est un nombre réel.
 - (a) Montrer que l'on peut définir une quantité E indépendante du temps vérifiant une équation de la forme (E_2) .
 - (b) On note E_i la valeur approchée de E à l'instant $t_i, i \in J_n$, calculée en utilisant les valeurs approchées de $y(t_i)$ et $z(t_i)$ obtenues à la question **B-1.** Montrer que $E_{i+1} - E_i = h^2 \omega^2 E_i$.
 - (c) Qu'aurait donné un schéma numérique qui satisfait à la conservation de E ?
 - (d) En portant les valeurs de y_i et z_i sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement, quelle serait l'allure du graphe qui respecte la conservation de E .



- (e) La mise en œuvre de la méthode d'Euler explicite génère le résultat graphique donné figure 1 à gauche. Dans un système d'unités adapté, les calculs ont été menés en prenant $y_0 = 3$ et $z_0 = 0, t_{min} = 0, t_{max} = 3, \omega = 2\pi$ et $n = 100$.

En quoi ce graphe confirme-t-il que le schéma numérique ne conserve pas E ? Pouvez vous justifier son allure ?

Partie C : Schéma de Verlet

Le physicien français Loup Verlet a proposé en 1967 un schéma numérique d'intégration d'une équation de la forme (E_1) dans lequel, en notant $f_i = f(y_i)$ et $f_{i+1} = f(y_{i+1})$, les relations de récurrence s'écrivent :

$$y_{i+1} = y_i + h z_i + \frac{h^2}{2} f_i \quad \text{et} \quad z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

- C-1. Écrire une fonction `verlet` qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$.
- C-2. On reprend l'exemple de l'oscillateur harmonique (question **B-3.**) et on compare les résultats obtenus à l'aide des schémas d'Euler et de Verlet.
 - (a) Montrer que dans le schéma de Verlet, on a $E_{i+1} - E_i = O(h^3)$.
 - (b) La mise en œuvre du schéma de Verlet avec les mêmes paramètres que ceux utilisés au **B-3.e)** donne le résultat de la figure 1 à droite. Interpréter l'allure de ce graphe.
 - (c) Que peut-on conclure sur le schéma de Verlet ?